Math:
In. 2729. a.



Math. P. 540

Mathesis. Algebra specialis.
Ars combinatoria et arithmetica probabilium 238 c

R

Grundriss der Combinationslehre

nebst

Anwendung derselben

auf

die Analysis

von

D. Conrad Diedrich Martin Stahl,

Professor auf der Universität zu Jena.

Jena und Leipzig,

bei Christian Ernst Gabler

1800.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochwohlgebornen

dem

Herrn

Johann Wolfgang von Göthe,

Sächſiſch-Weimarſchen wirklichen Geheimenrathe,

dem

Verehrer und Beförderer

alles Wahren, Schönen und Guten

in tiefſter Ehrfurcht

gewidmet.

Vorbericht.

Leibnitz war der Erste, welcher die Wichtigkeit der Combinationslehre für die Analysis ganz wahrnahm und sich daher bemühete, sie zu vervollkommnen und in den Stand zu setzen, dass sie auf die Analysis überhaupt angewandt werden könnte. Er erreichte aber seinen Zweck nicht, theils weil er einige combinatorische Operationen z. B. das Combiniren und Variiren zu bestimmten Summen nicht in seine Gewalt bekam, theils auch weil er nicht auf die schicklichsten Zeichen verfiel. Nachher machten freilich Mehrere, von den Combinationen und Versetzungen auf die Analysis Anwendungen z. B. Cramer bei

dem Eliminiren der unbekannten Gröſsen nnd Boſcowich und Caſtillon bei der Potenzirung der Polynomien, aber an die Beſtimmung feſter Regeln für jede einzelne combinatoriſche Operation und an eine Zeichenſprache, welche den Weg der Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis überhaupt, gebahnt hätte, wurde nicht gedacht, ſondern man begnügte ſich mehrentheils mit der Feſtſetzung der Regeln die Anzahl der Complexionen zu beſtimmen, welche die einzelnen combinatoriſchen Operationen geben und lieſs alſo die Combinationslehre im Ganzen unbearbeitet. So war der Zuſtand dieſer Wiſſenſchaft als Hindenburg auf ihre Wichtigkeit für die Analyſis aufmerkſam gemacht wurde. Er fing ſogleich an, feſte Regeln für die einzelnen combinatoriſchen Operationen feſtzuſetzen und auf eine Zeichenſprache zu denken, durch welche ihre Anwendung auf die geſammte Analyſis möglich und leicht gemacht würde. Mit ſeinen Entdeckuugen machte er uns ſeit 1778 in einzelnen Schriften bekannt, in welchen

er

nach und nach die combinatorischen Operationen vereinfachte, neue hinzufügte, seine zeichensprache vervollkommnete und ihren Nutzen für die Analysis durch wirkliche Anwendung darthat. Seine combinatorische Abhandlung die VIte in der Schrift: der Polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis, Leipzig 1796, fing aber erst an ein allgemeines Interesse für sein System zu erregen, denn ausser Hindenburgs Schülern, scheinen sich vorher nur Klügel, Pfaff und Kramp ernstlich dafür interessirt zu haben. Ich gestehe es gern, dass auch mir erst durch diese Schrift die Augen geöffnet wurden, aber von diesem Augenblicke an, habe ich auch keinen grössern Wunsch gehabt, als durch eine zusammenhängende vollständige Darstellung des ganzen Hindenburgischen Systems das Studium desselben erleichtern und dadurch mehr verbreiten zu können. Mehrere zusammentreffende Umstände hinderten mich eher als jetzt diesen Wunsch zu erfüllen und erlaubten mir am Ende doch nicht ganz so viele Zeit auf die Ausarbei-

tung zu verwenden, als ich dazu hätte haben müssen. Ich selbst habe daher noch manches gegen meine Schrift zu erinnern, welches aber doch nicht sowohl die Sache selbst als vielmehr die Form betrift.

Die ganze Schrift zerfällt in drei Abschnitte: Im ersten wird von der Combinationslehre überhaupt gesprochen und eine rein arithmethische Abhandlung gegeben; der zweite enthält die eigentliche Combinationslehre und der dritte zeigt wie diese auf die Entwickelung der Produkte, der Dignitäten, der Quotienten und der Umkehrung der Reihen angewandt werden kann. — Hierbei konnte ich nur von den Combinationen und Variationen mit Wiederholungen Gebrauch machen, ich behalte es mir daher vor, in der Folge noch die Anwendung der übrigen Operationen zu zeigen.

Ich halte es für unnöthig hier speciell anzugeben was mir bei dieser Schrift eigenthümlich zugehört und würde überhaupt davon schweigen wenn ich nicht glaubte

zur

zur Erleichterung der richtigen Beurtheilung derſelben folgendes ſagen zu müſſen. Bei der Bearbeitung der eigentlichen Combinationslehre war mein Hauptgeſichtspunkt, Hindenburgs aufgeſtellte Sätze ſyſtematiſch darzuſtellen und ſtreng zu beweiſen; der Plan den ich hierbei vor Augen hatte, machte nothwendig, daſs ich eine rein arithmetiſche Abhandlung voranſchickte. Die Art und Weiſe überhaupt betrachtet, wie ich im dritten Abſchnitte die analytiſchen Sätze behandele iſt ganz die Hindenburgiſche; bei der nähern Entwickelung dieſer Sätze aber und bei dem ſyſtematiſchen Ableiten derſelben aus einander bin ich meinen eigenen Weg gegangen.

In Rückſicht auf den Druck muſs ich folgendes bemerken: Zu den Klaſſenzeichen und Binominalcoefficienten wollte ich zwar abſichtlich gröſsere Lettern als zur Textſchrift haben, weil mir dieſes in mehrern Hinſichten nützlich zu ſeyn ſchien z. B. um ſie deſtomehr von den Coefficienten zu unterſcheiden, wenn hierzu groſse Buchſta-

ben genommen werden; es war aber mein Wille nicht, dass diese Lettern sich so beträchtlich durh ihre Grösse von den übrigen auszeichnen sollten, als in dieser Schrift der Fall ist, ich wurde aber gezwungen diese Lettern zuzulassen, weil die Buchstaben N, N, M, M in der Druckerei nicht kleiner vorhanden waren. — Auf die Correctheit des Drucks habe ich zwar viele Mühe verwandt, aber demungeachtet ist es mir wegen der vielen Schwierigkeiten, welche der Druck machte, doch nicht gelungen, sie von bedeutenden Druckfehlern gänzlich frei zu machen. Es ist daher nothwendig, dass man beim Lesen gleich anfangs auf das angehängte Verzeichniss der Druckfehler Rücksicht nimmt.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

Gegenstand der Combinationslehre. Seite 1—3

Erklärung des arithmetisch combinatorischen und rein combinatorischen Verfahrens. — 3—4

Angabe der arithmetischen Aufgaben, auf welche sich das arithmetisch-combinatorische Verfahren gründet. — 4—5

Entwickelung der Regeln wie man absolut und bedingt für eine Zahl die nächstgrössere findet. — 6—14

Aufgabe mit gegebenen Zifern entweder alle Zahlen zu schreiben, die sich damit schreiben lassen, oder nur die welche unter bestimmten Einschränkungen damit geschrieben werden können. — 14—23

Zwei-

Zweiter Abschnitt.

Combinationslehre.

1) Von den Complexionen überhaupt.

Erklärung der verschiedenen Complexionen, des Wiederholungsexponenten, der Klassen und des Zeigers. Seite 24—28

2) Von den Involutionen und Evolutionen überhaupt.

Begriff der Involution und Eintheilung derselben in vollständige und unvollständige. —28—32

3) Von den Versetzungen.

Erklärung was unter Versetzen verstanden wird: Aufgaben alle Versetzungen mehrerer gegebener Elemente zu finden, nebst andern hiervon abhängenden Aufgaben: Bestimmung der Anzahl der Versetzungen. —32—50

4) Von den Combinationen.

Erklärung des Begriffs Combiniren, Eintheilung desselben und Bezeichnung der Combinationsklassen. —50—54

α) Von dem Combiniren überhaupt mit Wiederholungen. —54—71

β) Von dem Combiniren überhaupt ohne Wiederholungen. —72—86

γ) Von dem Combiniren zu bestimmten Summen mit Wiederholungen. —86—120

δ) Von dem Combiniren zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen. —120—128

ε) Von dem Combiniren mehrerer Reihen. —128—137

5) Von den Variationen.

Erklärung und Eintheilung des Variirens, Bezeichnung der Variationsklassen. Seite 137—139

α) Von dem Variiren überhaupt mit Wiederholungen. —140—149

β) Von dem Variiren überhaupt ohne Wiederholungen. —150—159

γ) Von dem Variiren zu bestimmten Summen mit Wiederholungen. —159—177

δ) Von dem Variiren zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen. —177—181

ε) Von dem Variiren mehrerer Reihen. —181—189

6) Gleichungen für die Combinationen und Variationen.

α) Gleichungen für die Combinationen mit Wiederholungen. —190—191

β) Gleichungen für die Combinationen ohne Wiederholungen. —191—192

γ) Gleichungen für die Variationen mit Wiederholungen. —192—193

δ) Gleichungen für die Variationen ohne Wiederholungen. —193—194

Erklärung des Polynomialcoefficienten. —195

ε) Gleichungen zwischen Combinationen und Variationen mit Wiederholungen. —195—196

ζ) Gleichungen zwischen Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen. —197

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis.

I. Erklärung analytischer Zeichen. Seite 199—202

II. Combinatorische Entwickelung der Produkte mehrerer Reihen. — 202—220

III. Combinatorische Entwickelung der Dignitäten der Reihen. — 221—252

IV. Combinatorische Entwickelung der Produkte der Dignitäten mehrerer Reihen. — 252—271

V. Combinatorische Entwickelung der Quotienten mehrerer Reihen. — 271—307

VI. Umkehrung der Reihen. — 307—322

Verzeichniss combinatorischer Schriften.

Grund-

Grundriſs der Combinationslehre nebſt Anwendung derſelben auf die Analyſis.

Erſter Abſchnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

§. 1.

Die **Combinationslehre** beſchäftigt ſich mit der Zuſammenſetzung gegebener Dinge zu mehrern Ganzen. Die gegebenen Dinge nennt ſie Elemente, bezeichnet ſie im allgemeinen mit Buchſtaben und zeigt das Zuſammenſetzen derſelben durch ein bloſses Schreiben neben einander an.

 Sind

Sind mehrere Elemente a, b, c, d, e, zum Zusammensetzen gegeben, so lassen sich im allgemeinen hier drei Aufgaben denken:

1) Es werden alle Ganze verlangt, die sich aus den Elementen für die Bedingung zusammensetzen lassen, dass in einem jeden Ganzen alle Elemente vorkommen, aber in dem einem immer anders als in jedem der übrigen geordnet seyn sollen z, B. a b c d e und b c a d e. Die Ganzen müssen sich also blofs durch die Form von einander unterscheiden. Das Anordnen der gegebenen Elemente auf jede mögliche Weise neben einander, wird Versetzen und eine jede der gefundenen Anordnungen eine Versetzung genannt.

2) Es sollen ausser den gegebenen Elementen noch alle Ganze angegeben werden, welche sich durch die Verbindung von zwei, drei, vier Elementen u. s. w. unter der Bedingung darstellen lassen, dass sich keines der Ganzen von einem andern blofs durch die Anordnung seiner Elemente unterscheiden darf. Der Unterschied der Ganzen muss also nicht blofs formell sondern er muss materiell seyn. Die Handlung wodurch man sie erhält, heisst Combiniren und ein jedes dadurch gefundene Ganze, eine Combination.

3) Es werden nicht nur alle materiell von einander verschiedene Ganze verlangt, welche die Elemente a, b, c, d, e, zulassen, sondern auch alle mögliche Formen dieser Ganzen, welche das verschiedentliche Anordnen ihrer Elemente giebt, also überhaupt alle formell oder materiell von einander verschiedene Ganze, die nur immer für die gedachten Elemente statt finden. Man würde hier offenbar seinen Zweck erreichen, wenn man erst-

lich alle Combinationen der Elemente und hierauf von jeder Combination wieder alle Versetzungen aufsuchte. Es lassen sich aber auch beide Handlungen in eine einzige vereinigen und diese wird dann Variiren und ein jedes der dadurch gefundenen Ganzen eine Variation genannt.

Diese drei Aufgaben geben also überhaupt drei combinatorische Operationen: Versetzen, Combiniren und Variiren und mehrere als diese finden daher auch nicht statt. Es lassen sich aber die beiden letzten unter verschiedenen Bedingungen verrichten: 1) dass in den Combinationen und Variationen ein jedes der gegebenen verschiedenen Elemente mehreremal, 2) dass ein jedes darinn nur *ein*mal vorkommen darf. Dies giebt die Eintheilung des Combinirens und Variirens in Combiniren und Variiren mit und ohne Wiederholungen. 3) Eben so kann man auch die Bedingung hinzufügen, dass wenn die Elemente auf bestimmte Zahlen bezogen werden, die Summe der Elemente einer Combination oder Variation eine bestimmte Zahl seyn soll. Hieraus entsteht die Eintheilung des Combinirens und Variirens in Combiniren und Variiren überhaupt und zu bestimmten Summen. Bei diesen wird auf eine Summe gesehn, bei jenen aber nicht. *a*).

§. 2.

Die combinatorischen Operationen lassen sich auf ein bloſses Aneinanderfügen und Untereinandersetzen der Elemente so reduciren, dass die Vorschriften hierfür ganz unabhängig von Sätzen jeder Wissenschaft sind. Es ist daher die Combinationslehre in sofern eine selbständige Wissenschaft. Der Übergang aus ihr in die Arithmetik ist äusserst leicht, weil die arithmetischen Operationen nichts anders als bedingte combinatorische sind, so dass

A 2 schon

a) Eine ausführlichere Erklärung der combinatorischen Operationen wird an gehörigen Orte gegeben werden.

schon das blosse Schreiben der Zahlen in natürlicher Ordnung eine bestimmte combinatorische Operation ist. Ja die Verbindung der combinatorischen Sätze mit den arithmetischen ist so einfach, dass man durch ein blosses bedingtes Schreiben der Zahlen alle drei genannte Operationen verrichten kann, wenn man die gegebenen zu bearbeitenden Elemente auf Zahlen bezieht. Nimmt man bei der Behandlung combinatorischer Aufgaben die Arithmetik zu Hülfe, so verfährt man arithmetisch combinatorisch, im entgegengesetzten Falle aber rein combinatorisch.

§. 3.

Die rein combinatorische Behandlung hat grosse Vorzüge vor der arithmetisch combinatorischen, weil jene einfacher und daher leichter ist und bei ihr nicht wie bei dieser eine Umsetzung der Zahlen in die gegebenen Elemente nöthig ist und weil sich bei der rein combinatorischen für die Anwendung sehr wichtige Darstellungen des Geforderten geben lassen, die sich bei der arithmetisch combinatorischen nicht darbiethen. Indessen so wahr dieses auch ist, so wird es doch bei dem Vortrage der Combinationslehre zweckmäsig seyn die combinatorische Behandlung wenigstens nicht ganz zu übergehn um die Richtigkeit dessen, was jetzt und vorhin in §. 2. gesagt ist deutlich vor Augen zustellen. Es sollen daher von den combinatorischen Aufgaben, deren arithmetische Auflösung nicht zu verwickelt wird, sowohl arithmetisch combinatorische als rein combinatorische Auflösungen gegeben werden. Damit aber die zur arithmetischen Behandlung nothwendigen arithmetischen Aufgaben, den systematischen Vortrag der Combinationslehre nicht unterbrechen, ist es nothwendig, dass sie hier angegeben und die Wahrheiten worauf sie sich gründen, systematisch entwickelt werden.

§. 4.

Die gedachten arithmetischen Aufgaben sind solche, nach welchen mit gewissen gegebenen Zifern entweder

alle

alle Zahlen geschrieben werden sollen, die damit geschrieben werden können, oder nur die Zahlen, welche sich damit für gewisse angegebene Bedingungen schreiben lassen, aber in beiden Fällen so, dass man bei dem Schreiben der Zahlen allemal von der kleinern zur grössern übergeht. Die erwähnten Bedingungen sind: 1) Es sollen in den Zahlen die Zifern so von der Linken nach der Rechten auf einander folgen, dass nie eine grössere vor einer kleinern steht; d. h. die Zahlen sollen gutgeordnet seyn. 2) Die Summe die man durch die Addition der einzelnen Zifern der Zahlen erhält, soll eine gewisse bestimmte seyn. 3) Es soll bei gegebenen verschiedenen Zifern keine in einer Zahl öfter als einmal vorkommen. *a*), 4) Es sollen sich die Zahlen nur durch die Anordnung ihrer Zifern von einander unterscheiden.

§. 5.

Die Auflösung dieser Aufgaben ist leicht so bald man weiss, wie man von einer gegebenen Zahl zu der kömmt, welche von ihr, absolut oder unter den eben (§. 4.) gedachten Bedingungen, die nächstgrössere ist. Bei der Bestimmung der Art und Weise wie dieses geschieht, soll ein Zahlensystem mit einer unbestimmten Anzahl von Grundzeichen zum Grunde liegen, es sollen aber in diesem Systeme, wie bei dem gewöhnlichen, die Werthe der Zifern einer Zahl wachsen, desto weiter sie sich in ihr, in Rücksicht auf ihre Stelle, von der ersten Stelle zur Rechten befinden. Zu den Beispielen wird das decadische gebraucht.

 Ent-

a) Wenn eine combinatorische Aufgabe die dritte Bedingung enthält, so wird ihre arithmetische Auflösung mühsam; solche combinatorische Aufgaben werde ich daher nur rein combinatorisch auflösen und sie deswegen unter den arithmetischen Aufgaben übergehn.

Entwickelung der Regeln wie man absolut und bedingt (§. 5.) für eine Zahl die nächst gröſsere findet.

§. 6.

1. *Satz.*

Eine m + 1 zifrige Zahl ist gröſser als jede *m*zifrige.

2. *Satz.*

Schreibt man eine gewiſse Zifer p, ſowohl vor eine gröſsere als kleinere *m*zifrige Zahl, ſo iſt die m + 1 zifrige, welche aus der gröſsern *m*zifrigen entſteht, gröſser als die welche man aus der kleinern *m*zifrigen erhält.

3. *Satz.*

Wenn ſich zwei m + 1 zifrige Zahlen bloſs dadurch von einander unterſcheiden, daſs ſich die eine mit q und die andere mit p anfängt, ſo iſt die mit der Anfangszifer q gröſser als die mit der Anfangszifer p, wenn q gröſser als p iſt. Z. B. 35426 iſt gröſser als 25426. (2. Satz).

4. *Satz.*

Eine Zahl wird gröſser wenn man für irgend eine ihrer Zifern eine gröſsere ſetzt und ſie wächſt um deſto weniger, deſto kleiner die ſubſtituirte und deſto geringer die Ordnung der Zifer iſt, für welche man ſubſtituirt hat. Man vergröſsert daher eine Zahl durch Subſtitution einer Zifer ſo wenig als möglich, wenn man in die Stelle der Zifer, welche die geringſte Ordnung hat, eine um 1 gröſsere Zifer ſetzt.

5. *Satz.*

Eine Zahl wird gröſser, wenn irgend eine ihrer Zifern vergröſsert wird, wenn man auch gleich alle Zifern geringerer Ordnung verkleinert. Es iſt z. B. 235999 kleiner als 236111.

6.

6. *Satz.*

Wenn man in einer Zahl eine Zifer der pten Ordnung vergröfsert, fo wird hierdurch relativ die geringfte Vergröfserung der Zahl bewirkt, wenn für alle Zifern geringerer Ordnung, die geringfte Zifer gefetzt wird, (5. Satz). Will man daher von einer Zahl die nächftgröfsere haben und die letzten *m* Zifern lafsen keine Vergröfserung mehr zu, fo mufs man für die welche, von der letzten angerechnet, die m + 1te ift die nächftgröfsere Zifer fchreiben, und für jede der gedachten *m* Zifern, die geringfte fubftituiren, Sollte aber gar keine Zifer eine Vergröfserung zulafsen, fo mufs man ihnen 1 vorfchreiben und in ihre Stelle die geringfte Zifer fetzen. *a*). z. B. die nächftgröfsere Zahl für 139 ift 140, für 1399 die Zahl 1400 und für 999 die Zahl 1000.

7. *Satz.*

Eine Zahl wird verkleinert, wenn man eine Zifer der pten Ordnung kleiner macht, wenn auch fchon für alle Zifern geringerer Ordnung gröfsere fubftituirt werden z. B. Es ift 234999 kleiner als 235231.

8. *Satz.*

Wird in einer Zahl für eine Zifer der pten Ordnung eine kleinere Zifer gefetzt, fo wird hierdurch relativ die geringfte Verkleinerung der Zahl verurfacht, wenn man für die Zifern geringerer Ordnung die gröfste Zifer fchreibt. (7. Satz).

9. *Satz.*

Wenn man aus einer Zahl durch Vergröfserung einer Zifer der pten Ordnung eine gröfsere machen will, ohne doch die Summe der Zifern zu verändern, fo mufs man nach gefchehener Vergröfserung, mit Zifern eine Verklei-

 nerung

a) Abfolut genommen foll unter der geringften Zifer, o verftanden werden. Bei der Anwendung diefer Sätze aber, wird es jedesmal von der Aufgabe abhängen, welchen Werth die geringfte Zifer haben foll. Dies letzte gilt auch von der höchften Zifer.

nerung vornehmen, deren Ordnung geringer als die pte ist. Denn soll die Summe unverändert bleiben, so muss wegen der Vergrösserung der Zifer der pten Ordnung nothwendig mit einer oder mehrern der andern Zifern eine Verkleinerung vorgenommen werden. Hierzu darf man aber keine Zifer nehmen, welche eine höhere Ordnung hat als die vergrösserte, weil dadurch die ganze Zahl abnähme, folglich muss die Verkleinerung mit solchen Zifern geschehn, deren Ordnung geringer als die pte ist. (7. Satz).

10. *Satz.*

Um daher eine Zahl zu vergrössern ohne doch die Zifernsumme zu ändern, darf man keine Vergrösserung mit der Zifer der geringsten Ordnung vornehmen.

11. *Satz.*

Will man also aus einer Zahl, ohne die Zifernsumme zu verändern, die nächstgrössere machen und die letzte Zifer lässt noch eine Verkleinerung zu, so muss man die vorletzte um 1 vergrössern uud die letzte um 1 verkleinern.

12. *Satz.*

Wenn sich eine Zahl mit m gleichen Zifern endigt, die keine Verkleinerung mehr zulassen und es soll hieraus dadurch eine grössere Zahl der nämlichen Zifernsumme gemacht werden, dass man für eine Zifer eine grössere substituirt, so muss die Substitution für eine Zifer geschehn. die wenigstens m + 2 Stellen von der letzten Zifer entfernt ist, Denn nach geschehener Substitution muss wenigstens *eine* Zifer verkleinert werden; diese kann aber keine von den genannten m Zifern seyn, folglich muss sie von der Letzten angerechnet wenigstens die m + 1te Stelle haben und daher ist klar, dass die vergrösserte wenigstens die m + 2te Zifer von der Letzten angerechnet seyn müsse. (9. Satz.)

13. *Satz.*

Wenn die letzten m gleichen Zifern keine Verkleinerung mehr zulassen, so erhält man die nächstgrössere der

der nämlichen Zifernſumme, wenn man die m + 2te, von der letzten Zifer angerechnet, um 1 vergröſsert und für alle Zifern geringerer Ordnung, die geringſte Zifer ſetzt, auſser der letzten für welche das Supplement zur Zifernſumme der gegebenen Zahl, geſetzt werden muſs. (10. Satz, 4. Satz, 5. Satz). Z. B. für 1235000 iſt die nächſtgröſsere Zahl der nämlichen Zifernſumme dieſe: 1240004.

14. *Satz.*

a) wenn eine Zahl gutgeordnet iſt und man vergröſsert ihre Zifer der *m*ten Ordnung um 1, ſo daſs ſie gleich p wird, ſo muſs man, wenn durch die geſchehene Vergröſserung der Zifer relativ die geringſte Vergröſserung der Zahl und zugleich eine gutgeordnete Zahl entſtehn ſoll, für alle Zifern deren Ordnung geringer als die mte iſt, p ſubſtituiren. Denn ſoll die Zahl eine gutgeordnete bleiben ſo dürfen der Zifer p nach der Rechten hin, keine kleinere Zifern folgen als p iſt, folglich iſt p die kleinſte welche für die Zifern ſubſtituirt werden kann, deren Ordnung geringer als die mte iſt, und daher giebt auch dieſe Subſtitution für die geſchehene Vergröſserung, die geringſte Zahl. Wird z. B. in der Zahl 2568 die Zifer 5 um 1 vergröſsert ſo iſt für dieſe Subſtitution die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl dieſe: 2666.

b) Wenn alſo die letzten *m* Zifern keine Vergröſserung mehr zulaſsen, ſo erhält man die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl, wenn man für die Zifer, welche von der letzten angerechnet, die m + te iſt, die nächſtgröſsere z ſetzt und dieſe z auch in die Stelle der letzten m Zifern ſchreibt. Läſst aber k e i n e Zifer der Zahl eine Vergröſserung zu, ſo bekömmt man die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl, wenn man ihr 1 vorſchreibt und auch für jede der gedachten Zifern 1 ſetzt. Z. B. die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl für 129 iſt 133, für 1299 die Zahl 1333 und für 999 die Zahl 1111.

15. *Satz.*

Wenn eine gutgeordnete Zahl ſich mit m gleichen Zifern endigt und man vergröſsert die Zifer welche von der letzten angerechnet die m + 1te und um 1 kleiner als jede jener m Zifern iſt, um die Einheit, ſo muſs man alle übrige Zifern unverändert laſſen, wenn man für jene Subſtitution die geringſte Vergröſserung haben und zugleich eine gutgeordnete Zahl behalten will (14. Satz). Die Zifernſumme der hierdurch erhaltenen Zahl iſt um 1 gröſser als die Zifernſumme der Zahl, woraus ſie gemacht iſt.

16. *Satz.*

Iſt die Zifer der mten Ordnung einer gutgeordneten Zahl kleiner als die Zifern geringerer Ordnung und zwar wenigſtens um 2 kleiner als die letzte und man ſetzt für dieſe Zifer der *m*ten Ordnung die nächſtgröſsere p und ſchreibt für die zu ihrer Rechten befindlichen Zifern, ebenfalls p, ſo entſteht eine gutgeordnete gröſsere Zahl, deren Zifernſumme entweder ſo groſs oder kleiner als die Zifernſumme der gegebenen Zahl iſt.

17. *Satz.*

Aus einer gutgeordneten Zahl macht man die nächſtgröſsere gutgeordnete mit unveränderter Zifernſumme, wenn man erſtlich von der letzten an, die nächſte Zifer p aufſucht, welche wenigſtens um 2 kleiner iſt als dieſe letzte und hierauf für dieſe gefundene Zifer p die nächſtgröſsere q ſubſtituirt und dieſe q auch in die Stelle der Zifern ſetzt, welche auf p, nach der Rechten hin, folgen, die letzte ausgenommen, für die man das Supplement zur Zifernſumme ſetzen muſs. Denn deſto näher die Zifer p. welche man vergröſsert bei der letzten ſteht, um deſto weniger wird die Zahl vergröſsert (1. Satz). Iſt dieſe Vergröſserung vorgenommen und aus p, q geworden, ſo muſs für die folgenden wegen 14 Satz, auch q geſchrieben werden. Es muſs aber gedachte p wenigſtens um 2 kleiner ſeyn, als die letzte, weil durch das

vor-

vorgeschriebene Verfahren, wenn sie nur um 1 größer wäre, eine Zahl entstünde, deren Zifernsumme größer wäre als die der gegebenen Zahl (15. Satz). Ist sie aber um 2 kleiner als die letzte, so entsteht durch die vorgeschriebene Substitution eine Zahl mit einer entweder eben so grosen oder mit einer kleinern Zifernsumme (16. Satz). Im ersten Falle ist sie dann die gesuchte Zahl und im zweiten Falle braucht nur die Summe auf die vorhingedachte Weise supplirt zu werden. Z. B. Für 23478 ist die nächstgrößere gutgeordnete mit der nämlichen Zifernsumme, die Zahl 23559.

Anmerkung.

Sollte bei einem bestimmten Falle das Supplement größer werden als der Werth der höchsten Zifer beträgt, so muſs das Supplement so unter die Zifern der geringsten Ordnung vertheilt werden, daſs man von der letzten Zifer an, so viel zu einer jeden addirt, als sich nur immer zur letzten, vorletzten u. s. w. addiren läſst, ohne daſs die Summe den Werth der höchsten Zifer übersteigt. Denn durch die Vertheilung des Supplements auf die vorgeschriebene Weise, wird die Summe vollständig und dadurch die Zahl am geringsten vergrößert, weil man mit der Vertheilung des Supplements bei der Zifer der geringsten Ordnung den Anfang macht, und jeder so viel davon giebt als sich ihnen nur immer geben läſst ohne den Werth der höchsten Zifer zu übersteigen. Auch erhellet, daſs hierbei die Zahl gutgeordnet bleibt. Z, B. Es ist bei dem decadischen Systeme von 125556 die nächstgrößere gutgeordnete Zahl der nämlichen Zifernsumme, diese: 133359.

18. *Satz.*

Wenn die Zifern einer Zahl von der Linken nach der Rechten so auf einander folgen, daſs allemal die kleinere auf die größere folgt, so ist sie unter allen den Zahlen, die mit diesen Zifern geschrieben werden können, die größte.

19. *Satz.*

Sind die Zifern einer Zahl gutgeordnet, so hat die Zahl unter allen denen, die sich mit diesen Zifern schreiben lassen, den geringsten Werth.

20. *Satz.*

Sind die Zifern einer Zahl nicht, wie im 18ten Satze angegeben ist, unter sich geordnet, so läfst sich mit den Zifern eine noch gröfsere Zahl schreiben, als die gegebene ist.

21. *Satz.*

Eine Zahl kann durch ein blofses Vertauschen ihrer Zifern gegen einander vergröfsert werden, wenn ihre Zifern nämlich die Stellung unter sich haben, dafs nicht allemal die kleinere auf die gröfsere folgt.

22. *Satz.*

Eine Zahl wird durch ein Umtauschen ihrer Zifern gegen einander nur dann vergröfsert, wenn hierbei in die Stelle derjenigen Zifer eine gröfsere gesetzt wird, welche unter den umgetauschten die höchste Ordnung hat (5. Satz, 7. Satz).

23. *Satz.*

Wird eine Zahl durch Umtauschen der Zifern vergröfsert, so wächst sie dadurch um desto mehr, desto höher die Ordnung der Zifer ist, die unter den umgetauschten die höchste Ordnung hat. Will man daher eine Zahl durch Verwechselung der Zifern so wenig als möglich vergröfsern, so mufs man sich hierbei auf die Zifern der geringsten Ordnung einzuschränken suchen. Wie viele dieser Zifern hier erforderlich sind, findet man offenbar, wenn man von der Rechten nach der Linken grade nur so viele Zifern abschneidet, als hinreichend sind um eine Zahl zu erhalten, die sich durch das Vertauschen ihrer Zifern vergröfsern läfst. (19. Satz, 20. Satz.)

24. *Satz.*

Hat man eine Zahl deren erſte Zifer z kleiner iſt als die nächſtfolgende und es ſind die Zifern welche auf die erſte folgen ſo geordnet wie im 18ten Satze angenommen wurde, ſo macht man hieraus die nächſtgröſsere Zahl, welche man durch eine bloſse Vertauſchung der Zifern bekommen kann, wenn man für die erſte z diejenige ſubſtituirt, welche unter den Zifern zu ihrer Rechten die nächſtgröſsere iſt und hierauf z nebſt den übrigen nach dem 19 Satze geordnet, neben die ſubſtituirte ſchreibt. Denn ohne Vertauſchung der erſten Zifer kann mit der Zahl durch bloſses Verwechſeln der Zifern keine Vergröſserung vorgenommen werden, man muſs folglich nothwendig z gegen eine der Zifern umtauſchen, die ſich zu ihrer Rechten befinden. Hier darf aber nicht für z eine Zifer geſetzt werden, die ihr gleich oder gar kleiner als ſie iſt (22. Satz,) folglich muſs man für ſie eine gröſsere ſubſtituiren. Da man nun bei dem vorgeſchriebenen Verfahren für die Zifer z die ſetzt, welche unter den übrigen von ihr die nächſtgröſsere iſt und alle übrige Zifern der Zahl neben dieſe ſubſtituirte Zifer ſo geordnet ſchreibt daſs ſie die kleinſte Zahl bilden, die ſich mit ihnen ſchreiben läſst (19. Satz), ſo iſt einleuchtend, daſs dadurch die Zahl nicht nur vergröſsert wird, ſondern daſs ſie auch zugleich die geringſte Vergröſserung erhält, welche durch bloſse Verſetzung der Zifern erhalten werden kann.

25. *Satz.*

Will man eine Zahl Z durch Umtauſchung der Zifern ſo wenig als möglich vergröſsern, ſo ſchneide man von der Linken nach der Rechten Zifern ab, die eine Zahl bilden, deren erſte Zifer z zwar kleiner iſt als die nächſtfolgende, deren übrige Zifern aber ſo geordnet ſind, daſs niemals die nächſtfolgende gröſser iſt als die nächſtvorhergehende. Dieſen Theil der Zahl Z vergröſsere man nach dem 24ten Satze und laſſe alle übrige Zifern der Zahl Z unverändert ſtehn, Denn hier wird die Vergröſserung nach der Vorſchrift des 23ten und 24ten Satzes zugleich vor-

vorgenommen, folglich so, daſs die Zahl den möglichst kleinsten Wachsthum erhält, den sie durch bloſses Vertauschen der Zifern bekommen kann.

Aufgaben mit gegebenen Zifern entweder alle Zahlen zu schreiben, die sich damit schreiben lassen, oder nur die welche unter bestimmten Einschränkungen damit geschrieben werden können.

§. 7.

Aufgabe.

Es sollen alle Zahlen geschrieben werden, die mit den Zifern 1, 2, 3, ... p geschrieben werden können, und zwar so, daſs man von der kleinsten Zahl successiv zur gröſsten übergeht.

Auflösung.

1) Man schreibe die einzifrigen Zahlen, wie sie ihrer Gröſse nach, unter sich folgen, neben einander.

2) Als die erste zweizifrige Zahl setze man 11 hin und leite hieraus die übrigen zweizifrigen Zahlen nach dem 4ten und 6ten Satze (§. 6.) her.

3) Man setze vor die erste zweizifrige Zahl die Zifer 1 und folgere hieraus wieder nach dem 4ten und 6ten Satze die andern dreizifrigen Zahlen.

4) Nach der nämlichen Vorschrift, wie man die dreizifrigen Zahlen aus den zweizifrigen abgeleitet hat, leite man die vierzifrigen aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen u. s. f. ab.

Beweis.

Bei der Beobachtung der gegebenen Regeln schreibt man zuerst die einzifrigen Zahlen so hin, daſs man von der kleinsten zur gröſsten geht und von dieser geht man dann successiv nach dem 6ten und 4ten Satze zu den andern Zahlen fort, so daſs man also immer von einer Zahl zur nächstgröſsern kömmt. Es werden also hierbei, gewiſs die Zahlen so hingeschrieben, wie sie ihrer Gröſse

nach

nach auf einander folgen, auch wird keine übergangen, weil das ſucceſsive Fortſchreiten von einer Zahl zur nächſtgröſsern dieſes nicht zuläſst.

Beiſpiele.

Es ſind die Zifern 1, 2, 3, 4, gegeben

1,	2,	3,	4,
11,	12,	13,	14,
21,	22,	23,	24,
31,	32,	33,	34,
41,	42,	43,	44,
111.	112,	113,	114,
121,	122,	123,	124,
131,	132,	133,	134,
141,	142,	143,	144,
211,	212,	213,	214,
221,	222,	223,	224,
231,	232,	233,	234,
241,	242,	243,	244,
311,	312,	313,	314,
"	"	"	"
341,	342,	343,	344,
411,	412,	413,	414,
"	"	"	"
441,	442,	443,	444,
1111,	1112,	1113,	1114,
u.	ſ.		w.

§. 8.

Aufgabe.

Alle gut geordnete Zahlen zu ſchreiben, die mit den Zifern 1, 2, 3...p, geſchrieben werden können, und zwar in der Ordnung, daſs allemal die kleinere Zahl früher als die gröſsere geſchrieben wird.

Auflöſung.

1, Man ſchreibe die einzifrigen Zahlen ſucceſsiv von der kleinſten Zahl 1 bis zur gröſsten p neben einander.

2.

2) Man fetze die geringfte zweizifrige Zahl 11 hin und leite hieraus nach dem 4ten Satze fo viele andere her als hiernach gefchehn kann. Hat man die höchfte Zahl die fich hierdurch finden läfst, fo mache man aus diefer nach b) 14. Satze die nächftfolgende und wende auf diefe wieder die Vorfchrift des 4ten Satzes an und wenn dies nicht mehr angeht, fo nehme man aufs neue den 14ten Satz b) zu Hülfe u. f. w. bifs man zu der zweizifrigen Zahl kömmt, deren beide Zifern keine Vergröfserung mehr zulafsen.

3) Man fchreibe vor die geringfte zweizifrige Zahl die Zifer 1 und leite hieraus wieder die übrigen fo dafs man fich hierzu des 4ten und 14ten Satzes b) fo bedient, wie es zu der Ableitung der zweizifrigen Zahlen aus der geringften vorgefchrieben ift.

4) Auf diefelbe Weife wie die dreizifrigen aus den zweizifrigen abgeleitet werden, leitet man die vierzifrigen wieder aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen ab u. f. w.

Beweis.

Da man zuerft die einzifrigen Zahlen ihrer Gröfse nach neben einander fchreibt, hierauf die geringfte zweizifrige Zahl 11 hinfetzt und aus diefer nach dem 4ten und 14ten Satze b) alle übrige zweizifrige Zahlen herleitet und eben fo aus der geringften dreizifrigen Zahl 111 wieder die andern folgert und nach der nämlichen Regel die vierzifrigen, fünfzifrigen Zahlen u. f. f. darftellt fo ift einleuchtend, dafs die gefundenen Zahlen wachfend fortlaufen, alle gutgeordnet find und wegen des hiermit verbundenen Fortganges von der kleinern Zahl zur nächftgröfsern gutgeordneten, keine übergangen werden kann. Da nun die gegebene Aufgabe diefes verlangt, fo thut ihr auch die Auflöfung völlig Genüge.

Bei-

Beispiel.

Es ſind die Zifern 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben.

1,	2,	3,	4,	5,	6,
11,	12,	13,	14,	15,	16,
	22,	23,	24,	25,	26,
		33,	34,	35,	36,
			44,	45,	46,
				55,	56,
					66,
111,	112,	113,	114,	115,	116,
	122,	123,	124,	125,	126,
		133,	134,	135,	136,
			144,	145,	146,
				155,	156,
					166,
	222,	223,	224,	225,	226,
		233,	234,	235,	236,
			244,	245,	246,
				255,	256,
					266,
		333,	334,	335,	336,
			344,	345,	346,
				355,	356,
					366,
			444,	445,	446,
				455,	456,
					466,
				555,	556,
					566,
					666,
1111,	1112,	1113,	1114,	1115,	1116,

u. ſ. w.

§. 9.

Aufgabe.

Es ſollen mit 1, 2, 3 p, alle Zahlen, deren Ziffernſumme gleich p iſt, ſo geſchrieben werden, daſs man nach und nach von der kleinſten Zahl zur gröſsten kömmt.

Auflöſung.

Man ſuche zuerſt die einzifrigen, dann die zweizifrigen, hierauf die dreizifrigen Zahlen u. ſ. ſ. nach folgenden Regeln:

1) Man ſchreibe die Zahl p hin, dieſe iſt die einzige einzifrige Zahl, welche ſich hier denken läſst.

2) Aus dieſer erhält man die geringſte zweizifrige, indem man p um 1 vermindert und dieſer um 1 verminderten Zifer, 1 vorſetzt. Hieraus bekömmt man die zweite, wenn man die letzte Zifer um 1 verkleinert und die erſte um 1 vergröſsert. Auf die nämliche Weiſe erhält man aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte u. ſ. w. Die zweizifrige, deren letzte Zifer 1 iſt, iſt die gröſste zweizifrige Zahl.

3) Um die kleinſte dreizifrige Zahl zu erhalten, denke man ſich die zuletzt gefundene zweizifrige als eine dreizifrige, in deren höchſtenZifernſtelle o ſteht und leite hieraus nach des §. 6. 13ten Satze die nächſtgröſsere Zahl her. Dieſe Zahl iſt die erſte dreizifrige. Aus dieſer leite man alsdann die zweite, aus der zweiten die dritte u. ſ. f. nach den Regeln des 12ten und 13ten Satzes des §. 6. ab. Die gröſste dreizifrige Zahl endigt ſich mit 2 Einſen.

4) So wie man die dreizifrigen aus den zweizifrigen Zahlen erhalten hat, bekömmt man auch die vierzifrigen aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen, die ſechszifrigen aus den fünfzifrigen u. ſ. f.

Die

Die gröſste Zahl deren Ziffernſumme p iſt, iſt eine Zahl mit p Ziffern, deren eine jede 1 iſt.

Beweis.

Da man hier von der einziffrigen Zahl p zu den zweiziffrigen, dreiziffrigen, vierziffrigen Zahlen u. ſ. w. nach den Regeln des 12ten und 13ten Satzes des §. 6. kömmt, ſo iſt einleuchtend, daſs in jeder Zahl die Summe der Ziffern gleich p iſt, daſs man ferner ſucceſsiv von der kleinſten Zahl zur gröſsten übergeht und daſs aus dieſem Grunde auch keine hier denkbare Zahl übergangen wird.

Beiſpiele.

1)

6; 15, 24, 33, 42, 51; 114, 123, 132, 141, 213, 222, 231, 312, 321, 411; 1113, 1122, 1131, 1212, 1221, 1311, 2112, 2121, 2211, 3111; 11112, 11121, 11211, 12111, 21111; 111111.

2)

8; 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71; 116, 125, 134, 143, 152, 161, 215, 224, 233, 242, 251, 314, 323, 332, 341, 413, 422, 431, 512, 521, 611; 1115, 1124, 1133, 1142, 1151, 1214, 1223, 1232, 1241, 1313, 1322, 1331, 1412, 1421, 1511, 2114, 2123, 2132, 2141, 2213, 2222, 2231, 2312, 2321, 2411, 3113, 3122, 3131, 3212, 3221, 3311, 4112, 4121, 4211, 5111; 11114, 11123, 11132, 11141, 11213, 11222, 11231, 11312, 11321, 11411, 12113, 12122, 12131, 12212, 12221, 12311, 13112, 13121, 13211, 14111, 21113, 21122, 21131, 21212, 21221, 21311, 22112, 22121, 22211, 23111, 31112, 31121, 31211, 32111, 41111; 111113, 111122, 111131, 111212, 111221, 111311, 112112, 112121, 112211, 113111, 121112, 121121, 121211, 122111, 131111, 211112, 211121, 211211, 212111, 221111, 311111; 1111112, 1111121, 1111211, 1112111, 1121111, 1211111, 2111111; 11111111.

3)

4

13
22
31

112
121
211

1111

§. 10.

Aufgabe.

Mit den Zifern 1, 2, 3, ... p, alle gutgeordnete Zahlen zu schreiben, deren Zifernsumme gleich p ist und zwar in der Ordnung, dass man zuerst die kleinste Zahl hinschreibt und von dieser successiv zu den grössern übergeht.

Auflösung.

Man gehe von der einzifrigen Zahl successiv zu den zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. s. w. nach folgenden Vorschriften:

1) Es wird zuerst die Zahl p hingeschrieben; diese ist die einzige hier mögliche einzifrige Zahl.

2) Aus dieser leitet man die erste und geringste zweizifrige Zahl her, indem man sie um 1 vermindert und der hierdurch entstandenen p — 1, die Zifer 1 vorschreibt. Hieraus bekömmt man die nächstfolgende, wenn man ihre zweite Zifer, also p — 1, um 1 verkleinert und ihre erste Zifer, nämlich 1, um 1 vergrösert. Auf die nämliche Weise bekömmt man aus der hierdurch erhaltenen zweizifrigen Zahl, die dritte

te zweizifrige und ſo überhaupt aus der nächſtvorhergehenden die nächſtfolgende. Kömmt man hierbei auf eine Zahl deren Zifern unter ſich gleich ſind oder bei der ſich die erſte Zifer nur um die Einheit von der letzten unterſcheidet, ſo iſt dieſe die letzte zweizifrige Zahl.

3) Um die erſte dreizifrige Zahl zu bekommen, ſchreibt man der zuletzt erhaltenen zweizifrigen, o vor und leitet aus dieſer nach dem 17ten Satze des §. 6. die nächſtgröſsere her; dieſe iſt die erſte und geringſte dreizifrige Zahl. Aus dieſer erhält man alsdenn, vermittelſt des 17ten Satzes in §. 6. ſucceſſiv alle folgende. Die dreizifrige Zahl iſt die letzte und daher gröſste, aus welcher durch den 17ten Satz des §. 6. keine gröſsere dreizifrige gemacht werden kann.

4) Aus den dreizifrigen Zahlen leitet man alsdenn auf die nämliche Weiſe die vierzifrigen, aus den vierzifrigen, die fünfzifrigen u. ſ. f. ab, wie die dreizifrigen aus den zweizifrigen abgeleitet werden.

Beweis.

Aus der einzifrigen Zahl findet man offenbar nach 2) alle gutgeordnete zweizifrige zur Ziffernſumme p, denn man geht nach dieſer Vorſchrift ſucceſſiv von der kleinſten zu den gröſsern über und bleibt bei der ſtehn, aus welcher keine gutgeordnete zweizifrige Zahl weiter abgeleitet werden kann. Da nun aus dieſen nach den Regeln des 17ten Satzes in §. 6. alle dreizifrige, vierzifrige Zahlen u. ſ. w. hergeleitet werden, ſo iſt einleuchtend, daſs man durch die gegebene Auflöſung alle gutgeordnete Zahlen zur Zifernſumme p erhält, und zugleich ſucceſſiv von der kleinſten Zahl zur gröſsten kömmt, weil man von der kleinſten Zahl, nämlich von p ausgeht.

Beiſpiele.

1)

7
—
16
25
34
—
115
124
133
223
—
1114
1123
1222
—
11113
11122
—
111112
—
1111111

2)

6
—
15
24
33
—
114
123
222
—
1113
1122
—
11112
—
111111

3)

8
—
17
26
35
44
—
116
125
134
224
233
—
1115
1124
1133
1223
2222
—
11114
11123
11222
—
111113
111122
—
1111112
—
11111111

§. 11.

Aufgabe.

Es ſollen alle Zahlen ſucceſſiv von der kleinſten bis zur gröſsten geſchrieben werden, die ſich mit den Zifern 1, 2, 3, 4, ... p unter der Bedingung ſchreiben laſſen, daſs eine jede Zahl, alle dieſe gegebene Zifern, und keine öfter als einmal enthält.

Auf-

Auflösung.

Man schreibe zuerst die Zifern gutgeordnet neben einander, dies giebt die erste Zahl. Aus dieser leite man nach der Vorschrift des 25ten Satzes in §. 6. die zweite, aus dieser zweiten, die dritte, aus der dritten die vierte her u. s. w. bis man auf eine Zahl kömmt, deren Zifern so geordnet sind, daſs allemal die kleinere auf die gröſsere folgt. Diese Zahl ist die letzte und gröſste.

Beweis.

Die erste Zahl welche man hinschreibt ist die kleinste (§. 2, 19 Satz). Da nun hieraus nach dem 25ten Satze des §. 6. successiv die gröſsern hergeleitet werden, so ist klar, daſs die Auflösung der Aufgabe völlig entspricht. Daſs die Zahl hier die gröſste ist, deren Zifern umgekehrt gutgeordnet sind folgt aus §. 6, 18. Satz.

Beispiel.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Zweiter Abſchnitt.

Combinationslehre.

1) Von den Complexionen überhaupt.

§. 12.

1. *Erklärung.*

Mehrere neben einander geſtellte Dinge in irgend einer Verbindung gedacht, machen eine Complexion. Eine ſolche wäre z. B. *bcfgh*, wo man ſich unter den Buchſtaben denken mag, was man will, alſo auch Zahlen. (In der Folge kann bloſs von Buchſtaben- und Zahlencomplexionen die Rede ſeyn). Die gegebenen Dinge woraus die Complexion zuſammengeſetzt wird, heiſsen Elemente. *a*). Kommen in einer Complexion mehrere identiſche

a) Bedeuten die Elemente Zahlen, ſo muſs, bei dem Gebrauche der Complexionen in der Arithmetik, beſtimmt werden, in welcher Verbindung ihre Elemente zu nehmen ſind. Es kann z. B. ab in arithmetiſcher Verbindung, $a + b$, $a - b$, $a . b$, $a : b$, a^b, $\sqrt[a]{b}$ u. ſ. w. ſeyn.

tische Elemente neben einander gestellt vor, wie z. B. in *aaaabf*, so ist es oft sehr nützlich, für die Complexion, welche diese Elemente für sich bilden, ein einziges derselben mit einer Zahl oben zur Rechten zu schreiben, die mit ihrer Anzahl übereinstimmt. Auf diese Weise schreibt man die eben gedachte Complexion so: a^4bf. Die Zahl welche hier die Menge der identischen Elemente anzeigt, heisst der Wiederholungsexponent. *b)*

2. *Erklärung.*

Complexionen einerlei Art sind solche, die aus einer gleichen Anzahl von Elementen bestehn und die übrigens die Relation unter einander haben, dass in dem Falle, wenn in der einen, verschiedene Elemente mehreremal vorkommen, in der andern auch so viele verschiedene Elemente relativ ebenso oft vorkommen müssen, Also *aab* und *ccd* sind Complexionen einerlei Art, wie auch *aabcdb* und *beegff*, nicht aber *cbbd* und *fggg*, weil nämlich in der ersten *b* zweimal vorkömmt, aber nicht auch in der zweiten sich ein Buchstabe zweimal befindet, denn *f* ist darinn einmal und *g* dreimal vorhanden.

3. *Erklärung.*

Complexionen sind unter sich ähnlich, wenn sie sich durch weiter nichts als durch ihre Ordnung von einander unterscheiden. Z. B. *abffg* und *afgfb*. Unähnlich sind sie hingegen wenn sie nicht blofs durch die Ordnung ihrer Elemente von einander verschieden sind.

b) Werden die Elemente in einer Complexion bei der ein Wiederholungsexponent vorkömmt, als Zahlen angesehn und durch die Multiplication verbunden gedacht, so verwandelt sich der Wiederholungsexponent in einen Potenzexponenten.

4. *Erklärung.*

Eine Complexion ist gutgeordnet, wenn bei Zahlen die Elemente von der Linken nach der Rechten so auf einander folgen, dafs nie eine gröfsere Zifer vor einer kleinern ist, und wenn bei Buchstaben nie ein späterer Buchstabe des Alphabets vor einem frühern steht, sondern umgekehrt wenn sich jedesmal der frühere Buchstabe vor dem spätern befindet. Es sind also 1368, *bfhm* gutgeordnete, hingegen 5273, *facb* sind schlechtgeordnete Complexionen. *a*)

5. *Erklärung*,

Den Complexionen kommen nach ihren Anfangselementen verschiedene Ordnungen zu. So ist *abfghm* eine Complexion der Ordnung *a*, der Ordnung *ab*, der Ordnung *abf* u. s. f. Hiernach kann die Ordnung einbuchstabig, zweibuchstabig, dreibuchstabig u. s. f. seyn.

6. *Erklärung*.

Wenn eine Complexion einer gewissen Bedingung nicht entspricht, so heisst sie in dieser Rücksicht eine unnütze Complexion, im entgegengesetzten Falle eine brauchbare. *b*)

7. *Erklärung*.

Die Complexionen bekommen die Namen Binionen, Ternionen, Quaternionen, Quinionen, Senionen, u. s. w. Ntionen, nachdem sie aus zwei, drei, vier, fünf, sechs und überhaupt n Elementen bestehn.

a) Die gutgeordnete Complexion ist gleichsam der Stellvertreter aller ihr ähnlichen Complexionen.

b) Sollen z. B. mit r, o, m, a, alle vierbuchstabige Complexionen geschrieben werden, die als Wörter der lateinischen Sprache einen bestimmten Sinn haben, so sind die Complexionen Roma, amor, armo, Maro, mora, oram, ramo brauchbare, die übrigen 17 vierbuchstabigen Complexionen aber, die sich aufser den geschriebenen, mit den gegebenen Buchstaben schreiben lassen, unnütze.

ſtehn. Hiernach nennt man auch die einzelnen Buchſtaben und Zahlen, woraus die Complexionen gebildet werden, Unionen, und wenn von den Complexionen geſprochen wird, die für eine gewiſse Anzahl von Dingen ſtatt finden, ſo zählt man die Unionen mit.

8. *Erklärung.*

Die Complexionen werden zur erſten, zweiten dritten und überhaupt nten Klaſſe gerechnet, nachdem ſie Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen u. ſ. w. Ntionen ſind, und heiſsen alsdenn Species der Klaſſe wozu ſie gehören. Die Unionen machen alſo die erſte, die Binionen die zweite, die Ternionen die dritte und ſo im allgemeinen die Ntionen die nte Klaſſe aus. Einer jeden Klaſſe kömmt ein Exponent zu, nämlich die Zahl iſt ihr Exponent, welche ſagt, die wievielſte Klaſſe ſie iſt. Die Klaſſen werden mit lateiniſchen groſsen Buchſtaben, nämlichdie erſte mit $\mathbf{A}$, die zweite mit $\mathbf{B}$, die dritte mit $\mathbf{C}$, und ſ. w, die nte mit $\mathfrak{N}$, bezeichnet. In einigen Fällen wird hierzu die gradeſtehende in andern aber die ſchiefſtehende Schrift gewählt. In der Folge wird dieſes näher beſtimmt werden. Bisweilen beſtimmt man aber auch eine Klaſſe dadurch daſs man angiebt, die wievielſte vorhergehende oder folgende ſie von einer gewiſsen beſtimmten iſt, und bezeichnet dieſs auf die Weiſe, daſs man über das gewöhnliche Zeichen der Klaſſe durch welche die andere beſtimmt werden ſoll, eine Zahl ſchreibt, die durch ihr Zeichen — oder + ſagt ob die zubezeichnende Klaſſe vorhergeht oder folgt und die durch ihre Gröſse anzeigt, die wievielſte vorhergehende oder folgende ſie iſt. So z. B. bedeuten $\overset{-3}{\mathbf{F}}$ und $\mathbf{C}$, ferner $\overset{+2}{\mathbf{F}}$ und $\mathbf{H}$ einerlei. $\overset{0}{\mathbf{F}}$ iſt mit $\mathbf{F}$ gleichgültig. Dieſe Zahlen heiſsen Diſtanzexponenten, a)

9. Er-

a) Die Diſtanzexponenten können nicht nur hier ſondern auch in

9. *Erklärung.*

Eine Klasse ist gutgeordnet, wenn ihre Zahlencomplexionen, als Zahlen angesehn, wachsend fortlaufen und wenn ihre Buchstabencomplexionen, als Wörter eines Lexicons betrachtet, so auf einander folgen, dass nie ein späteres Wort vor einem frühern steht.

10. *Erklärung.*

Wenn sich Zahlen — und Buchstabenelemente au einander beziehn, so schreibt man, wenn dieses angezeigt werden soll, entweder über oder unter die Buchstaben die sich darauf beziehenden Zahlen und schliesst die beiden Zeilen in Klammern ein. Bezögen sich z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. s. w. in der Ordnung wie sie genannt sind auf a, b, c, d, u. s. f. so zeigte dies die Figur $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} a, b, c, d \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots \end{pmatrix}$ an. Diese Figur heisst der Zeiger und vermittelst seiner ist mann im Stande sogleich Buchstabencomplexionen in Zahlencomplexionen und so umgekehrt zu verwandeln.

2. Von den Involutionen und Evolutionen überhaupt.

§. 13.

1. *Erklärung.*

Wenn in der Arithmetik die Glieder einer Reihe nach einem bekannten Gesetze durch einander bestimmt werden, so macht es keine Schwierigkeit jedes einzelne Glied anzugeben, sobald man successiv von dem ersten zu den folgenden fortgeht; anders verhält es sich aber, wenn man

in andern Fällen mit Nutzen gebraucht werden, z. B. bei auf einander folgenden Werthen und Gliedern.

man auſser der Ordnung ſogleich irgend ein verlangtes angeben ſoll. Man bedient ſich hierzu eines allgemeinen Gliedes, aber um dieſes zu erhalten iſt es nothwendig wenigſtens zuvor, bloſs zur Vorbereitung, einige der erſten Glieder zu entwickeln, ſo daſs man alſo nicht unmittelbar mit der Conſtruction des allgemeinen Gliedes anfangen kann. Iſt es gefunden ſo müſsen die einzelnen beſtimmten Glieder aus ihm durch Subſtitutionen entwickelt werden, die oft ſehr mühſam und ſchwierig ſind und häufig enthält die allgemeine Formel für das Glied das man ſucht viel überflüſſiges. Die Combinationslehre kennt aber ein Verfahren, das Verlangte ohne Umwege, durch eine bloſse Anordnung der gegebenen Elemente zu Complexionen ſo darzuſtellen, daſs in dem Ausdrucke nichts überflüſsiges iſt und daſs dieſer zugleich auf das deutlichſte alles Vorhergehende ſo vor Augen ſtellt, daſs man gleich bei dem erſten Blicke die Verbindung des Vorhergehenden mit dem Folgenden wahrnimmt und daſs man im Stande iſt durch ein bloſses Ziehn von graden, vertikalen und horizontalen Linien, das Vorhergehende von dem Folgenden abzuſondern. Ein ſolches Verfahren wird **Involution** genannt, weil das dadurch Erhaltene nicht nur das Verlangte darſtellt, ſondern auch zugleich das involvirt enthält, was der Ordnung nach, dem Verlangten vorhergeht. Sehr häufig nennt man aber auch den durch die Involution entſtandenen Ausdruck ſelbſt, **Involution**. *a*)

Wird z. B. verlangt, daſs man alle gutgeordnete Zahlen angeben ſoll, die ſich mit den Ziſern 1, 2, 3, 4 ſchreiben laſſen, ſo daſs die Ziſernſumme jeder Zahl gleich 4 iſt, ſo iſt die Darſtellung

1	1	1	1,
1	1	2	
1	3		
2	2		
4			

zu der

a) Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik. Erſter Band, erſtes Heft, pag. 13.

der man durch ein bloſses Anordnen der Elemente kömmt eine Involution; denn ſie giebt die geſuchten Zahlen 1111, 112, 13, 22, 4, ſie hat auch nichts überflüſſiges und enthält zugleich alle gutgeordnete Zahlen zu den vorhergehenden Summen, nämlich zur Summe 1 für die Zifer 1, zur Summe 2 für die Zifern 1, 2, zur Summe 3 für die Zifern 1, 2, 3 und zwar ſo, daſs dieſe durch ein bloſses Ziehn von Horizontal- und Vertikallinien von einander getrennt werden können, wie man aus der Figur deutlich ſieht. Dieſes A b ſ o n d e r n heiſst E v o l v i r e n. Die gedachten Linien pflegt man gewöhnlich ſchon bei der Conſtruction der Involution zu ziehn.

Eine andere Involution für die nämliche Aufgabe iſt

4,

—

1|3

22

——

1|12

——

1|111

denn es fällt deutlich in die Augen, daſs in dieſem Ausdrucke, auſser den gutgeordneten Zahlen zur Summe 4 noch die gutgeordneten zur Summe 3, 2 und 1 vorkommen und daſs dieſe ſehr leicht durch ein Linienziehn zu evolviren ſind, auch iſt klar, daſs er nichts beſitzt, das nicht nothwendig zu dem Geſuchten gehört. Allein bei dieſer Involution iſt die Evolution nicht ſo einfach wie bei der vorigen, denn es kann z. B. hier nicht wie dort die Abſonderung aller gutgeordneten Zahlen zur Summe 3 auf einmal geſchehn, ſondern man iſt hier genöthigt erſt die einzifrige Zahl für ſich zu evolviren, dann die zweizifrige und hierauf die dreizifrige. Der Grund hiervon liegt darinn, daſs man bei dieſer Darſtellung nicht vom Geringern zum Gröſsern übergeht.

Nennt man d i e Involution nur eine vollſtändige, welche alle Eigenſchaften der erſten hat, ſo ſind die Erforderniſſe einer vollſtändigen Involution dieſe:

1)

1) Daſs ſie alles nothwendige aber auch nichts enthält was nicht als Theil des Geſuchten anzuſehn iſt.

2) Daſs ſie alles beſitzt, was der Ordnung nach dem Geſuchten vorhergeht.

3) Daſs bei ihr der Fortgang von dem Vorhergehenden zum Folgenden ſo offen ſteht, daſs dieſes nach einem beſtimmten unveränderlichen Geſetze durch ein bloſses Hinzufügen neuer Elemente geſchehn kann.

4) Daſs ſich bei ihr das der Ordnung nach Vorhergehende von dem Folgenden auf eine einfache Weiſe auf *einmal* abſondern läſst.

Willkührlicher Satz.

Das Zeichen für Involution überhaupt iſt: J. Es iſt aber die Form dieſes Buchſtabens nach den verſchiedenen Involutionen, verſchieden. Dies wird in der Folge beſtimmt werden.

1. *Anmerkung.*

Es iſt *Involution* immer nur relativ zu verſtehn, den es kann eine Darſtellung in *einer* Hinſicht eine involutoriſche in einer *andern* aber wieder nicht ſeyn.

2. *Anmerkung.*

Es laſſen ſich auch Involutionen denken bei welchen die Theile von dem Ganzen durch Ebenen abzuſondern ſind. Eine ſolche könnte man eine körperliche und daher *die*, bei welcher das evolviren durch Linien geſchieht, eine ebene Involution nennen. *a*).

3)

a) Quod ipſas involutiones attinet, cum hucusque prolatae, ſint planae, quae in longum et latum extenduntur, mente con-

3. Von den Verſetzungen.

§. 14.

1. *Erklärung.*

Gegebene Dinge auf alle mögliche Weiſe *verſetzen*, heiſst alle unter ſich *ähnliche* Complexionen (§. 12, 3. Erkl.) darſtellen, deren eine jede alle gegebene Elemente enthält und auſser dieſen weiter keine beſitzt. Eine jede der dargeſtellten Complexionen wird eine *Verſetzung* genannt.

2. *Erklärung.*

Die Zahl welche ſagt, *wie viele* Verſetzungen einer gegebenen Anzahl von Dingen zukommen, heiſst die *Verſetzungszahl.*

Willkührlicher Satz.

Will man anzeigen, daſs für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots\end{smallmatrix}\right)$ die Verſetzungen der Buchſtaben oder Zahlenreihe gefunden werden ſollen, oder auch, daſs man ſich ſchon die Verſetzungen derſelben denkt, ſo bedient man ſich des Zeichens: $P \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots\end{smallmatrix}\right)$, wo P, Permutatio bedeutet. Kommen mehrere der nämlichen Elemente vor, ſo bedient man ſich häufig der Wiederholungsexponenten und ſchreibt daher z. B. ſtatt $P \left(\begin{smallmatrix}1, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 3, & 3, & 3, \\ a, & a, & a, & b, & b, & c, & c, & c, & c\end{smallmatrix}\right)$ dieſes: $P \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, \\ a^3, & b^2 & c^4\end{smallmatrix}\right)$.

§. 15.

cipi poſſunt etiam involutiones ſolidae, ſive trium dimenſionum: ſic ut partes ad certum finem conjungendae ſitae ſint omnes in plani alicujus vel horizontalis vel verticalis vel diagonalis interſectione, ſive eae etiam ſolidum tali plano terminatum compleant. (Disquiſitiones analyticae, auctore Pfaff. Vol. I. p. 273).

§. 15.

Aufgabe.

Es sollen alle mögliche Versetzungen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, \ldots \pi}{a, b, c, d, \ldots p}$. gefunden werden.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

Man schreibe zuerst die Complexion $1234 \ldots \pi$ und leite daraus die übrigen Complexionen her, wie man nach §. 11. aus der kleinsten Zahl alle übrigen erhält. Diese Complexionen sind alle Versetzungen der gegebenen Zahlen. Setzt man hierinn für die Zahlenelemente die mit ihnen correspondirenden Buchstaben, so bekömmt man alle verlangte Buchstabenversetzungen.

Beweis.

Schreibt man alle mögliche Zahlen, welche nach der Aufgabe des §. 11. mit $1, 2, 3, 4 \ldots \pi$ geschrieben werden können, so hat man gewiss alle verlangte Zahlencomplexionen; denn fehlte irgend eine Complexion, so gäbe diese eine Zahl, die sich durch die Auflösung der Aufgabe des §. 11. nicht finden liesse, welches doch nicht der Fall seyn kann. Dass man alle Buchstabencomplexionen erhält, wenn man in den Zahlenversetzungen für die einzelnen Elemente die damit correspondirenden Buchstaben setzt, ist an sich klar.

Anmerkung.

Um die Buchstabenversetzungen zu bekommen ist nicht nothwendig, dass man vorher die Zahlenversetzungen aufsucht, denn man kann sie als Zahlen betrachten und um sich dieses zu erleichtern den Buchstaben einen

geringern oder gröſsern Werth geben, nachdem ſie im Alphabete früher oder ſpäter vorkommen.

Beiſpiel.

Die Verſetzungen von a, b, c, d, ſind:

1) abcd	2) bacd	3) cabd	3) dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Anmerkung.

Die erſte Verſetzungscolumne enthält die Complexionen der Ordnung a; die zweite die der Ordnung b; die dritte die der Ordnung c; die vierte die der Ordnung d (§. 12, 5. Erkl.). Ein Beiſpiel für Zahlencomplexionen enthält §. 11.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

Es mag hier der Zeiger dieſer ſeyn; $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$.

1) Man ſetze die höchſte Zifer 4 hin und ſchreibe vor dieſe die Zifer 3; hierauf tauſche man 3 gegen 4 um und ſetze die ſo erhaltene Binion unter die zuerſt gefundene. Dies giebt die Verſetzungen von 3 und 4.

2) Um die Verſetzungen von 2, 3 und 4 zu erhalten, ſetze man zuerſt jeder der beiden Binionen 2 vor, ſo hat man die Verſetzungen der Ordnung 2. Hieraus leite man die Verſetzungen der Ordnung 3 und aus dieſen wieder die der Ordnung 4 her, indem man in den Ternionen der Ordnung 2, von der erſten bis

zur

zur letzten, die Zifern 2 und 3 und in den Ternionen der Ordnung 3 eben ſo die Zifern 3 und 4 gegen einander umtauſcht. Dieſe Ternionen, die man durch die Umtauſchung zweier Zifern erhalten hat, ſchreibe man in der Ordnung wie man ſie findet, unter einander, unter die letzte der Ternionen der Ordnung 2.

3) Aus dieſen Verſetzungen der Elemente 2, 3, 4 mache man folgendermaſsen die verlangten Verſetzungen der vier Elemente 1, 2, 3, 4;

Man ſchreibe zuerſt den ſämmtlichen Ternionen 1 vor, ſo hat man die Verſetzungen der Ordnung 1. In dieſen, von der erſten bis zur letzten, vertauſche man 1 und 2 gegeneinander, ſo bekömmt man die Verſetzungen der Ordnung 2. Hieraus leite man auf ähnliche Weiſe die Verſetzungen der Ordnung 3 und aus dieſen wieder die Verſetzungen der Ordnung 4 her. Wegen der Stellung die dieſe Quaternionen unter ſich haben müſsen, hat man die Vorſchrift zu beobachten, daſs man die erſte der Ordnung 2 unter die letzte der Ordnung 1 ſchreiben und die übrigen, unter dieſer ſo auf einander folgen laſſen muſs, wie man ſie nach der gegebenen Vorſchrift findet.

Die hierhergehörige Figur iſt für die Verſetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4, bis zu den Quaternionen der Ordnung 2 entwickelt, dieſe:

1 | 2 | 3 | 4
1 | 2 | 4 3
1 | 3 2 4
1 | 3 4 2
1 | 4 2 3
1 | 4 3 2
2 1 3 4
u. ſ. w.

Beweis.

Hat man die Verſetzungen der *m* Elemente b, c, d, e..., p, ſo findet man daraus alle die Verſetzungen der $m+1$ Elemente, a, b, c, d, e ... p, welche ſich mit *a* anfangen, wenn man einer jeden jener Mtionen, *a* vorſchreibt, weil ſich hier nur ſo oft eine verſchiedene $M+1$tion der Ordnung *a* denken läſst, als ſich die m Elemente b, c, d, e ...p verſchiedentlich geordnet neben *a* denken laſſen. Vertauſcht man in dieſen, *b* und *a* gegen einander, ſo erhält man lauter $M+1$'tionen der Ordnung b und dieſe ſind auch alle hier denkbare, denn es können nur ſo viele von der Ordnung b gedacht werden, als ſich die *m* Elemente a, c, d, e ... p auf verſchiedene Weiſe neben *b* ſchreiben laſſen, alſo wieder ſo viele, als *m* verſchiedene Elemente Verſetzungen geben. Eben ſo erhellet, daſs man hieraus alle $M+1$tionen der Ordnung *c* macht, wenn man in ihnen *c* gegen *b* und *b* gegen *c* umtauſcht. Setzt man nun dieſe Operation ſo lange fort bis man alle $M+1$tionen der Ordnungen a, b, c, ... p bekommen hat, ſo bekömmt man auch gewiſs alle Verſetzungen der $m+1$ Dinge a, b, c, d...p, weil dieſe nur $M+1$tionen der Ordnungen a, b, c, d...p ſeyn können. Hat man alſo alle Verſetzungen von *m* verſchiedenen Dingen und es kömmt noch ein von jenen verſchiedenes $m+1$tes hinzu, ſo laſsen ſich auf die angegebene Weiſe aus jenen Verſetzungen leicht die Verſetzungen dieſer $m+1$ Elemente angeben.

Da nun die gegebene Auflöſung dieſe Regel vorſchreibt um aus 34, 43, (den einzig möglichen beiden Verſetzungen der Elemente 3, 4), alle Permutationen der drei Elemente 2, 3, 4 und aus dieſen wieder alle Verſetzungen der vier Elemente 1, 2, 3, 4 zu erhalten, ſo leidet ihre Richtigkeit keinen Zweifel und zugleich erhellet, daſs ſich ihre Vorſchrift auf ſo viele Elemente ausdehnen läſst, als nur immer gegeben werden.

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung giebt für die Verſetzungen eine vollſtändige Involution, wie ſogleich der erſte Blick auf die vorige und hierunterſtehende Figur lehrt.

a	b	c	d
a	b	d	c
a	c	b	d
a	c	d	b
a	d	b	c
a	d	c	b
b	a	c	d
b	a	d	c
"	"	"	"

Denn ſie enthält nichts überflüſsiges, es laſsen ſich auch bei ihr durch bloſses Linienziehn, die Verſetzun- von einem Elemente, von zweien, dreien Elementen u. ſ. w. völlig auf einmal abſondern, auch liegt bei ihr der Fortgang von den Verſetzungen von *m* Elementen zu den Verſetzungen von m + 1 Elementen, durch ein bloſses Hinzufügen mehrerer Elemente nach einem beſtimmten unveränderlichen Geſetze, ſehr deutlich vor Augen.

2. *Anmerkung.*

Die Zahlenverſetzungen welche man durch die beiden Auflöſungen erhält, laufen wie wachſende Zahlen und die Buchſtabenverſetzungen gehn lexicographiſch fort, d. h. wenn man dieſe Buchſtabencomplexionen als Wörter eines Lexicons betrachtete, ſo würden ſie hierinn in der Ordnung auf einander ſolgen müſsen, wie ſie die Auflöſung gegeben hat.

3. *Anmerkung.*

Nach der erſten Auflöſung werden immer Complexionen aus Complexionen, jede nächſtfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet. Bei der zweiten Auflöſung werden Ordnungen aus Ordnungen, nächſtfolgende aus unmittelbar vorhergehenden gefolgert. Für die Darſtellung der Complexionen aus Complexionen, läſst ſich leicht eine rein combinatoriſche Vorſchrift geben, wie auch §. 19. geſchehn iſt. *a)*.

4. *Anmerkung.*

Die Anordnung der Complexionen nach der zweiten Auflöſung giebt eine Vertikalcolumne; es laſſen ſich aber leicht die Vorſchriften der Auflöſung dahin abändern, daſs die Complexionen eine Horizontalcolumne geben, wie man aus der hierunterſtehenden Figur deutlich ſieht.

d c	d b c b	d c d a c a	d b d a b a	c b c a b a
c d	b d b c	c d a d a c	b d a d a b	b c a c a b
b b c c d d		a a c c d d	a a b b d d	a a b b c c
a a a a a a		b b b b b b	c c c c c c	d d d d d d

Es werden aber bei dieſer die Complexionen von unten nach oben geleſen, wie z. B. die erſte Complexion *abcd.*

Dieſe Anmerkung bezieht ſich auch auf die vertikalen Anordnungen bei den übrigen combinatoriſchen Operationen.

5. *An-*

a) Der polynomiſche Lehrſatz, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. pag. 163. Hier iſt bei dieſer rein combinatoriſchen Auflöſung erinnert, daſs zwar bei den Verſetzungen die Regel Complexionen aus Complexionen herzuleiten rein combinatoriſch gegeben werden könne, nicht aber immer bei andern combinatoriſchen Operationen, daſs ſich aber das Ableiten der Ordnungen aus Ordnungen durchgängig rein combinatoriſch lehren laſſe.

5. *Anmerkung.*

Sowohl nach der erſten als zweiten Auflöſung erhält man die Verſetzungen der m + 1 Elemente a, b, c, d . . . p, indem man zuerſt die Verſetzungen der Ordnung *a*, dann die der Ordnung *b*, hierauf die der Ordnung *c* findet u. ſ. w. Aus dem Beweiſe der rein combinatoriſchen Auflöſung erhellet zugleich, daſs es bei m + 1 verſchiedenen Elementen ſo viele Verſetzungen der Ordnung *a*, der Ordnung *b*, der Ordnung *c* u. ſ. w. giebt als ſich *m* Dinge verſetzen laſſen.

§. 16.

Lehrſatz.

Die Verſetzungszahl (§. 14, 2. Erkl.) iſt für *n* verſchiedene Elemente gleich 1. 2. 3. 4. . . . n.

Beweis.

Wenn man mehrere unter ſich verſchiedene Elemente verſetzt, ſo erhält man Verſetzungen von ſo vielen verſchiedenen Ordnungen, als Elemente zu verſetzen gegeben ſind, auch kömmt die eine Ordnung ſo oft vor als jede andere, weil man bei *n* Elementen ſo viele Complexionen jeder Ordnung erhält als ſich n — 1 Elemente verſetzen laſſen (§ 15, 5. Anmerk.) Hieraus folgt: zwei Elemente geben Verſetzungen von zweien verſchiedenen Ordnungen, eine jede Ordnung kömmt einmal vor, folglich hat man bei zwei Elementen überhaupt zwei Verſetzungen. Drei Elemente geben Verſetzungen von drei verſchiedenen Ordnungen, von jeder Ordnung giebt es 2 Complexionen, folglich laſſen auch drei Elemente 3 . 2. Verſetzungen zu. Bei vier Elementen erhält man Verſetzungen von vier verſchiedenen Ordnungen, eine jede dieſer Ordnungen kömmt aber hier ſo oft vor als ſich drei Elemente verſetzen laſſen, folglich 3 . 2 mal und daher laſſen ſich vier Elemente auch 4 . 3 . 2 mal verſetzen.

 Hier-

Hieraus erhellet ſchon hinreichend, daſs *n* verſchiedene Elemente, 1.2.3.4....n Verſetzungen geben müſsen.

Zuſatz.

Es iſt alſo die Verſetzungszahl für zwei verſchiedene Elemente gleich 2, für drei gleich 6, für vier gleich 24, für fünf gleich 120 u. ſ. w.

§. 17.

Aufgabe.

Es ſoll die 302te Verſetzung der 6 Elemente a, b, c, d, e, f aufgeſucht werden, die man finden würde, wenn man ſie nach einer der beiden gegebenen Auflöſungen beſtimmte.

Auflöſung. a).

Die geſuchte Complexion muſs zu irgend einer einbuchſtabigen, zweibuchſtabigen, dreibuchſtabigen Ordnung u. ſ. w. gehören, welche für die gegebenen Elemente ſtatt findet (§. 12, 5. Erkl.) Man unterſuche daher zuerſt zu welcher einbuchſtabigen, dann zu welcher zweibuchſtabigen, hierauf zu welcher dreibuchſtabigen Ordnung ſie gehört u. ſ. w. auf folgende Weiſe:

1) Da ſich 5 Elemente 120mal verſetzen laſſen, ſo kömmt eine jede Ordnung der gegebenen 6 Elemente auch 120mal vor. Es iſt daher

die 1te	Verſetzung	bis zur	120ten,	von der	Ordnung	a
— 121te	———	— —	240ten,	— —	———	b
— 241te	———	— —	360ten,	— —	———	c

Es hat alſo die 302te gewiſs die Ordnung c.

2)

a) Man muſs hierbei vor Augen haben, daſs nach den beiden Auflöſungen der Aufgabe des §. 15, die Buchſtabenverſetzungen lexicographiſch und die Zahlenverſetzungen wie wachſende Zahlen fortlaufen und daſs daher auch bei jenen die Ordnungen lexicographiſch und bei dieſen wie wachſende Zahlen fortgehn müſsen.

2) Vier Elementen kommen 24 Verſetzungen zu, daher kömmt auch bei 6 Elementen eine jede zweibuchſtabige Ordnung 24mal vor. Unter den zweibuchſtabigen die ſich mit *c* anfangen, iſt aber *ca* die erſte, folglich iſt auch

die 241te Verſetzung bis zur 264ten, von der Ordnung ca
— 265te ——— — — 288ten, — — ——— cb
— 289te ——— — — 312ten, — — ——— cd

Es hat daher die 302te die Ordnung cd.

3) Drei Elemente laſſen ſich 6 mal verſetzen, folglich findet auch bei 6 Elementen jede dreibuchſtabige Ordnung 6 mal ſtat. Da nun unter den dreibuchſtabigen, die ſich mit *cd* anfangen, *cda* die erſte iſt, ſo iſt auch

die 289te Verſetzung bis zur 294ten, von der Ordnung cda
— 295te ——— — — 300ten, — — ——— cdb
— 301te ——— — — 306ten, — — ——— cde

Die 302te hat alſo die Ordnung *cde*.

4) Zwei Elemente ſind nur zweier Verſetzungen fähig, daher läſst ſich auch hier jede vierbuchſtabige Ordnung nur 2mal denken, folglich da unter denen, die ſich mit *cde* anfangen, hier *cdea* die erſte iſt, ſo iſt auch

die 301te Verſetzung bis zur 302ten von der Ordnung cdea.

Es hat alſo die 302te die Ordnung cdea.

5) Da bei 6 Elementen jede fünfbuchſtabige Ordnung nur einmal denkbar iſt, und unter denen, die ſich mit cdea anfangen, hier cdeab die erſte iſt, ſo iſt auch

die 301te Verſetzung von der Ordnung cdeab, alſo
— 302te ——— — — ——— cdeaf und aus

dieſem Grunde iſt die geſuchte 302te Verſetzung die Complexion cdeafb.

§. 13.

Aufgabe.

Es wird gefragt, die wievielſte Verſetzung der Elemente a, b, c, d, e, f die Complexion *cdeafb* iſt.

Auflösung.

Man bestimme zuerst die wievielste die erste und letzte Versetzung der Ordnung *c* ist. Hierauf untersuche man die wievielste die erste und letzte Complexion der Ordnung *cd* sey u. s. w. Jede dieser Untersuchungen führt auf zwei Zahlen, wovon die eine sagt die wievielste Complexion die gegebene wenigstens und die wievielste sie höchstens sey und diese zwei Zahlen nähern sich immer mehr und mehr desto weiter die Untersuchung fortgesetzt wird, so dass sie am Ende zusammenfallen. Folgendes wird dies erklären:

1) Es giebt hier von jeder einbuchstabigen Ordnung 120 Complexionen, folglich ist

Die 1te Versetzung bis zur 120ten, von der Ordnung a
— 121te ——— — — 240ten, — — ——— b
— 241te ——— — — 360ten, — — ——— c

Die gegebene Versetzung ist also wegen ihrer Ordnung *c*, wenigstens die 241te und höchstens die 360te.

2) Von jeder zweibuchstabigen Ordnung finden hier 24 Complexionen statt, daher ist

Die 241te Versetzung bis zur 264ten, von der Ordnung ca
— 265te ——— — — 288ten, — — ——— cb
— 289te ——— — — 312ten, — — ——— cd

Die gegebene Versetzung ist daher in Rücksicht auf ihre Ordnung *cd* wenigstens die 289te und höchstens die 312te.

3) Es lassen sich hier von jeder dreibuchstabigen Ordnung 6 Complexionen denken, folglich ist

Die 289te Versetzung bis zur 294ten, von der Ordnung cda
— 295te ——— — — 300ten, — — ——— cdb
— 301te ——— — — 306ten, — — ——— cde

Die gegebene Versetzung ist ihrer Ordnung *cde* nach, wenigstens die 301te und höchstens die 306te.

4)

4) Jede *vierbuchstabige* Ordnung ist hier 2mal denkbar, also ist die 301te Versetzung bis zur 302ten, von der Ordnung *cdea*.

Die gegebene Versetzung ist folglich entweder die 301te oder 302te.

5) Von jeder *fünfbuchstabigen* Ordnung läfst sich hier nur *eine* Complexion denken. Da nun die 301te die Ordnung *cdeab* haben mufs, so ist einleuchtend, dafs die gegebene Versetzung nicht die 301te sondern die 302te ist.

§. 19.

Aufgabe.

Es sollen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 2, & 3, & 3, \\ a, & a, & a, & b, & c, & c, \end{pmatrix}$ alle Versetzungen angegeben werden.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

Man schreibe zuerst die Complexion 111233, sehe diese als eine Zahl an und leite aus ihr nach §. 11. alle folgende Zahlen her. Die Zahl 111233 und die folgenden sind dann gewifs alle mögliche Zahlenversetzungen.

Beweis.

Diese Auflösung ist die nämliche welche als arithmetisch-combinatorische für die Aufgabe des §. 15 gegeben ist, folglich gilt auch für beide *ein und derselbe* Beweis.

Die

Die Zahlenverſetzungen ſind dieſe:

111233	123113	211133	311321
111323	123131	211313	312113
111332	123311	211331	312131
112133	131123	213113	312311
112313	131132	213131	313112
112331	131213	213311	313121
113123	131231	231113	313211
113132	131312	231131	321113
113213	131321	231311	321131
113231	132113	233111	321311
113312	132131	311123	323111
113321	132311	311132	331112
121133	133112	311213	331121
121313	133121	311231	331211
121331	133211	311312	332111

Setzt man hier für die Zahlenelemente die damit correſpondirenden Buchſtaben, ſo hat man alle Buchſtabenverſetzungen der Elemente a, a, a, b, c, c.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Elemente gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erſte Verſetzung. Hierauf leite man aus dieſer und ſo überhaupt aus jeder die ihr nächſtfolgende auf dieſe Weiſe her: Man ſuche von der Rechten nach der Linken d a s Element auf, auf welches z u e r ſt, ein, dem Zeiger nach, früheres Element folgt; für dieſes frühere ſubſtituire man von denen die ſich zu ſeiner Rechten befinden, dasjenige welches ihm dem Zeiger nach zunächſt folgt und ſchreibe es ſelbſt, und die welche ihm in der Complexion rechts hin folgen, die ſubſtituirte ausgenommen, gut geordnet neben die ſubſtituirte.

Be-

Beweis.

Wenn man das Ableitungsgesetz der Auflösung umkehrt, also es so ausdrückt: man suche von der Linken nach der Rechten dasjenige Element p auf, auf welches zuerst ein früheres folgt und substituire alsdenn für das spätere Element p, von denen die sich zu seiner Rechten befinden, das jenige welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht und schreibe alsdenn das spätere Element selbst, nebst denen, die ihm in der Complexion folgen, das substituirte ausgenommen, gutgeordnet neben dieses substituirte; so ist klar, dass man ein Gesetz hat, durch dessen fortgesetzte Anwendung aus einer jeden schlechtgeordneten Complexion eine gutgeordnete wird. Ist aber dieses der Fall, so ist auch einleuchtend, dass das directe Ableitungsgesetz der Auflösung von einer gutgeordneten Complexion nothwendig zu jeder schlechtgeordneten führen muss, welche aus der gutgeordneten durch versetzung der Elemente entstehn kann, dass man also gewiss durch die Auflösung alle gesuchte Versetzungen erhält.

Anmerkung.

Die Operation welche die rein combinatorische Auflösung vorschreibt, wird auch nach der arithmetisch-combinatorischen vorgenommen. Es entsteht also die rein combinatorische sogleich aus der arithmetischen, wenn man dieser das arithmetische Gewand nimmt. Dessen ungeachtet durfte aber doch hier der für die rein combinatorische Auflösung eigene Beweis nicht vernachläsigt werden, weil hierdurch erst ihre völlige Unabhängigkeit von der arithmetischen vor Augen gestellt wird.

§. 20.

Lehrsatz.

Die Versetzungszahl für $a^m b^n c^p d^q$ (§. 12, 1. Erkl.) ist gleich
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \text{———} (m + n + p + q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \times 1 \cdot 2 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q}$$

Be-

Beweis.

A, B, C, D, sollen Complexionen bedeuten, die keine gemeinschaftliche Elemente haben und in keiner derselben soll ein und dasselbe Element wiederhohlt vorkommen. Gesetzt nun man sieht die Elemente von A, B, C, D, insgesammt als solche an, die man versetzen will, setzt aber hierbei fest, dass in jeder Versetzung die Elemente, welche zu den einzelnen Complexionen A, B, C, D gehören, die Ordnung unter sich behalten sollen, welche sie in A, B, C, D, wie diese gegeben sind, haben, also dass in dem Falle in den Versetzungen das Element α früher als β, β eher als γ u. s. w. vorkommen muss, wenn sie als Elemente der Complexion A, in dieser, wie sie gegeben ist, in der genannten Ordnung auf einander folgen; so ist einleuchtend, dass man bei einer solchen Einschränkung nicht so viele Versetzungen erhält, als man ohne sie würde erhalten haben. Da nun diese Einschränkung eigentlich darinn besteht, dass man festsetzt, es sollen A, B, C, D, jede für sich betrachtet keine Versetzungen ihrer Elemente zulassen, so ist klar, dass man wegen A so vielmal weniger Versetzungen erhält, als die Versetzungszahl von A ausmacht; wegen B so vielmal weniger als die Versetzungszahl von B beträgt u. s. w. kurz überhaupt, dass man, wenn die Versetzungszahlen von A, B, C, D, die Zahlen π, φ, χ, ψ sind, auch $\pi . \varphi . \chi . \psi$ mal weniger Versetzungen bekömmt, als man würde bekommen haben, wenn jene Bedingung nicht gegeben wäre. Wäre also die eigentliche Versetzungszahl für die Elemente der Complexion ABCD gleich V, so würde die unter der gegebenen Einschränkung erhaltene Versetzungszahl gleich $\frac{V}{\pi . \varphi . \chi . \psi .}$ seyn. Dies giebt folgende Regel: wenn mehrere einzelne Complexionen, für sich betrachtet, keine Versetzungen ihrer Elemente zulassen, so findet man die Versetzungszahl für die gesammten Elemente der gedachten Complexionen, wenn man die Versetzungszahl aufsucht, wel-

welche ihnen ihrer Anzahl nach, nach §. 16 zukömmt, diese aber nachher durch das Produkt von allen Versetzungszahlen dividirt, welche den einzelnen Complexionen in Hinsicht auf die Anzahl ihrer Elemente zukommen. Ist daher $a^m\, b^n\, c^p\, d^q$ gegeben, wo wirklich a^m, b^n, c^p, und d^q keine Versetzungen erlauben, so ist ihre Versetzungszahl gleich

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8. \ldots\ldots\ldots (m+n+p+q)}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q}$$

Zusatz.

Es ist also die Versetzungszahl

von a^m gleich 1,

von $a^{m-1}b$ gleich m,

von $a^{m-2}b^2$ gleich $\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}$,

von $a^{m-3}b^3$ gleich $\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}$,

von $a^{m-4}b^4$ gleich $\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$,

von $a^{m-5}b^5$ gleich $\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3\,.\,m-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$, *a)* *b)*

u. s. w.

§. 21.

Aufgabe.

Es soll die Complexion angegeben werden, welche die 50te Versetzung der Elemente a, a, a, b, c, c ist.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe muss nothwendig im allgemeinen mit der Auflösung der Aufgabe des §. 17 über-

a) Die Exponenten in a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$ u. s. f. sind hier Wiederholungsexponenten.

b) Man vergleiche mit diesen Versetzungszahlen die Binomialcoefficienten.

übereinstimmen, man muſs alſo auch hier, wie dort, die verlangte Verſetzung dadurch erforſchen, daſs man unterſucht wie viele Complexionen es von den einzelnen auf einander folgenden Ordnungen giebt, um auf ſolche Weiſe ſucceſſiv zu erfahren, zu welcher einbuchſtabigen, zweibuchſtabigen, dreibuchſtabigen Ordnung ſie gehört u. ſ. w.

1) Die Ordnung a iſt hier 30 mal denkbar, weil die Elemente, a, a, b, c, c, 30 Verſetzungen zulaſſen, alſo in 30 verſchiedenen Stellungen unter ſich neben dem 6ten Elemente a gedacht werden können. Die Ordnung b findet hier wegen der Elemente a, a, a, c, c, 10mal ſtatt und die Ordnung c kömmt wegen der übrigen Elemente a, a, a, b, c, 20mal vor. Es iſt alſo

die 1te Verſetzung bis zur 30ten von der Ordnung a
— 31te — — — 40ten — — — b
— 41te — — — 60ten — — — c

Es hat alſo die 50te Verſetzung die Ordnung c.

2) Die Ordnung *ca* kömmt hier wegen der Elemente a, a, b, c, 12mal vor, folglich iſt

die 41te Verſetzung bis zur 52ten von der Ordnung ca.

Es hat daher die 50te Verſetzung die Ordnung ca.

3) Die Ordnung *caa* läſst ſich hier 6mal, die darauf folgende Ordnung *cab* nur 3mal und die Ordnung *cac* ebenfalls 3mal denken, alſo iſt

die 41te Verſetzung bis zur 46ten von der Ordnung caa
— 47te — — — 49ten — — — cab
— 50te — — — 52ten — — — cac

Die 50te Verſetzung hat alſo die Ordnung cac.

4)

4) Die erste vierbuchstabige Ordnung, welche sich mit *cac* anfängt, ist *caca*, folglich ist auch
die 50te Versetzung von der Ordnung *caca*.

5) Die Ordnung *cacaa* ist die erste fünfbuchstabige Ordnung, die sich mit *caca* anfängt, es ist daher
die 50te Versetzung von der Ordnung *cacaa*.

6) Da von den sechsbuchstabigen Ordnungen, welche sich mit *cacaa* anfangen die Ordnung *cacaab* die einzige mögliche hier ist, also alle gegebene Elemente, a, a, a, b, c, c, enthält, so ist einleuchtend, dass
die 50te Versetzung die Complexion *cacaab* seyn muss.

§. 22.

Aufgabe.

Es soll bestimmt werden, die wievielste Versetzung der Elemente a, a, a, b, c, c die Complexion *cacaab* ist.

Auflösung.

Weil die hier gegebene Aufgabe im Grunde mit der Aufgabe des §. 18 einerlei ist, so gilt auch im allgemeinen für beide dieselbe Auflösung. Man muss also hier successiv angeben, die wievielsten Complexionen von der Ordnung c, der Ordnung *ca*, *cac*, *caca* u. s. f. sind, und zwar auf folgende Weise:

1) Von der Ordnung *a* giebt es hier 30, von der Ordnung *b* finden 10 statt und von der Ordnung *c* kommen 20 Complexionen vor. Es ist also
die 1te Versetzung bis zur 30ten von der Ordnung a
— 31te ——— — — 40ten — — ——— b
— 41te ——— — — 60ten — — ——— c
Die gegebene Complexion *cacaab* ist also hiernach wenigstens die 41te und höchstens die 60te Versetzung.

2) Von der zweibuchstabigen Ordnung *ca* giebt es hier 12 Complexionen, folglich ist

die 41te Versetzung bis zur 52ten von der Ordnung ca.

Die gegebene Complexion ist daher ihrer Ordnung *ca* nach wenigstens die 41te und kann höchstens die 52te seyn.

3) Von der dreibuchstabigen Ordnung *caa* sind 6, von der Ordnung *cab* sind 3 und von der Ordnung *cac* ebenfalls 3 Complexionen denkbar. Es ist folglich

die 41te Versetzung bis zur 46ten von der Ordnung caa
— 47te ——— — — 49ten — — ——— cab
— 50te ——— — — 52ten — — ——— cac

Die gegebene Complexion ist also in Rücksicht auf ihre Ordnung *cac*, wenigstens die 50te und höchstens die 52te Versetzung.

4) Von der vierbuchstabigen Ordnung *caca* lassen sich 2 Complexionen denken, also ist

die 50te und 51te Versetzung von der Ordnung caca.

Die gegebene Complexion ist also ihrer Ordnung caca nach, entweder die 50te oder die 51te Versetzung.

5) Die fünfbuchstabige Ordnung *cacaa* findet nur einmal statt, folglich hat auch nur die 50te Versetzung diese Ordnung.

Da nun die gegebene Complexion diese Ordnung besitzt, so ist klar, dass sie die 50te Versetzung seyn muss.

4. Von den Combinationen.

§. 23.

1. *Erklärung.*

Das Combiniren wird eingetheilt in Combiniren überhaupt und Combiniren zu bestimmten Summen.

2. *Erklärung.*

Combiniren überhaupt besteht darinn, dass man alle Unionen und alle mögliche gutgeordnete Binionen, Ternionen, Quaternionen, Quinionen u. s. w. darstellt, welche für gewisse gegebene Elemente statt finden. Eine jede der gedachten Unionen, Binionen, Ternionen u. s. f. heisst hier eine Combination und der Inbegriff aller Combinationen, die zu einer und derselben Klasse gehören, macht eine Combinationsklasse aus. *a*).

Das Zeichen des Combinirens überhaupt für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ ist: Cb. $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ Spl. wo Cb, Combinatio, und Spl. simplex bedeutet.

Anmerkung.

Die schlechtgeordneten Complexionen, welche sich aus den gegebenen Elementen bilden lassen, erhält man durch Versetzung der Elemente der einzelnen Combinationen.

3. *Erklärung.*

Die Combinationen der zweiten, dritten und überhaupt der *n*ten Klasse suchen, heisst sie zu 2, 3, 4 und im

a) Die gegebene Erklärung bestimmt eigentlich ein Combiniren überhaupt im engern Sinne, denn wenn man von Combiniren überhaupt im allgemeinen spricht, so ist es nicht nöthig grade diese gutgeordneten Complexionen anzugeben, sondern es ist hinreichend, wenn die gefundenen Complexionen alle unter sich unähnlich sind und sich die, welche ausser diesen noch aus den gegebenen Elementen gemacht werden können, durch eine blosse Versetzung aus ihnen herleiten lassen. (Einleitung §. 1. pag. 2). Es erleichtert aber das Combiniren ungemein, wenn man die Combinationen allemal gutgeordnet macht, dies ist der Grund weswegen man unter Combinationen nur gutgeordnete Complexionen versteht.

im allgemeinen zu n verbinden. Die Zahl zu welcher combinirt werden ſoll, wird der **E x p o n e n t d e r C o m b i n a t i o n** genannt.

4. *E r k l ä r u n g.*

Verfährt man bei dem Combiniren als wäre ein jedes der gegebenen Elemente mehreremal und zwar wenn weiter nichts darüber beſtimmt wird, unendlichemal gegeben, ſo **c o m b i n i r t** man **m i t W i e d e r h o l u n g e n.**

Das Zeichen hierfür iſt für den Zeiger

$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\ldots\\ a, b, c, d\ldots\end{pmatrix}$ dieſes: Cb. $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\ldots\\ a, b, c, d\ldots\end{pmatrix}$ Spl. a. r.

wo a. r, *admiſſis repetitionibus* bedeutet.

Darf aber bei dem Combiniren ein jedes Element nicht öfter als gegeben gedacht werden, als es wirklich gegeben iſt, ſo **c o m b i n i r t** man **o h n e W i e d e r h o l u n g e n.**

Das hierhergehörige Zeichen iſt für den Zeiger

$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\ldots\\ a, b, c, d\ldots\end{pmatrix}$ dieſes: Cb. $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\ldots\\ a, b, c, d\ldots\end{pmatrix}$ Spl. o. r.

Nämlich o. r bedeutet hier *omiſſis repetitionibus.*

5. *E r k l ä r u n g.*

Das **C o m b i n i r e n z u e i n e r b e ſ t i m m t e n S u m m e** beſteht darinn, daſs man für einen gewiſsen Zeiger $\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\ldots\\ a, b, c, d\ldots\end{pmatrix}$ nicht **a l l e** Combinationen ſondern nur **d i e** ſucht, deren Elementenſumme eine gegebene Zahl z. B. 6 iſt.

Die Zeichen hierfür ſind:

Cb.$\begin{pmatrix}1, 2, 3\ldots\\ a, b, c\ldots\end{pmatrix}$num. n, a. r und Cb.$\begin{pmatrix}1, 2, 3\ldots\\ a, b, c\ldots\end{pmatrix}$num. n, o. r

wo n die gegebene Zahl bedeutet und a. r und o. r die vorhin angegebene Bedeutung haben.

6. *E r k l ä r u n g.*

Die einzelnen Combinations-complexionen zur Summe n, heiſsen **C o m b i n a t i o n s - z e r f ä l l u n g e n** der Zahl n.

Will-

Willkührlicher Satz.

Die Combinationsklaſſen, die erſte, zweite, dritte, vierte u. ſ. w. werden mit groſsen gradeſtehenden lateiniſchen Buchſtaben A, B, C, D u. ſ. w. bezeichnet. Um eine unbeſtimmte Klaſſe z. B. die *n*te anzudeuten, bedient man ſich ebenfalls eines groſsen lateiniſchen gradeſtehenden Buchſtabens, aber aus einem Alphabethe deſsen Buchſtaben wie geſchriebene ausſehn z. B. für die *n*te Klaſſe nimmt man den Buchſtaben $\mathcal{N}$, ſo daſs alſo N und $\mathcal{N}$ verſchiedenes bedeuten. Wird von Combinationen mit Wiederholungen geſprochen, ſo hängt man dem Klaſsenzeichen oben zur Linken einen Strich an, als $'A, 'B, 'C, 'D$ u. ſ. w. Bei Combinationen ohne Wiederholungen wird oben zur Rechten ein Strich geſetzt, als A', B', C', D' u. ſ. w. Für die Combinationen zur Summe *n* hat man die Zeichen $^{n}{'A}, ^{n}{'B}$, u. ſ. f. und $^{n}A', ^{n}B'$, u. ſ. w., jene für die mit Wiederholungen und dieſe für die ohne Wiederholungen. Das Zeichen für die Combinationsinvolutionen überhaupt iſt der gradeſtehende Buchſtabe J. Bei Combinationen überhaupt mit Wiederholungen hängt man dieſem oben zur Linken und bei Combinationen ohne Wiederholungen oben zur Rechten einen Strich an, ſo daſs man die beiden Zeichen $'J$ und J' hat. Die Zeichen für die Combinationsinvolutionen zur Summe *n* ſind $^{n}{'J}, ^{n}{'\mathfrak{J}}$ und $^{n}J', ^{n}\mathfrak{J}'$.

7. *Erklärung.*

Zum Combiniren wird entweder nur eine Elementenreihe, als a, b, c, d..., oder es werden mehrere dergleichen aber unter ſich verſchiedene gegeben.

Anmerkung.

Das bis jetzt von Combinationen geſagte bezieht ſich auf das Combiniren einer Elementenreihe insbeſondere

auch

auch wird dieses zuerst abgehandelt. Das andere wird unter der Ueberschrift, von dem Combiniren mehrerer Reihen, zuletzt vorgetragen.

a) Von dem Combiniren überhaupt mit Wiederholungen.

§. 24.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e \ldots}$ die Wiederholungs-combinationen verlangt.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe zuerst die Unionen 1, 2, 3, 4... wie sie, dem Zeiger nach, unter sich folgen, neben einander. Diese machen die erste Klasse (′A).

2) Aus der ersten Klasse (′A), leite man die zweite (′B,) aus dieser die dritte Klasse (′C) u. s. w. her, wie in §. 8. aus den einzifrigen Zahlen die zweizifrigen, aus den zweizifrigen die dreizifrigen abgeleitet werden u. s. w. und setze die zweite Klasse unter die erste, die dritte unter die zweite u. s. f.

Substituirt man in den Klassen ′A, ′B, ′C, ′D für die Zahlen die ihnen zugehörigen Buchstaben, so erhält man alle Buchstabencombinationen der Elemente a, b, c, d u. s. w.

Beweis.

Es muss hier bewiesen werden, dass man durch das vorgeschriebene Verfahren nur gutgeordnete Complexionen und zugleich alle erhält, welche sich mit den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. f. und a, b, c, d, e u. s. w. schreiben lassen. Dass bei den Zahlencomplexionen beides durch die gegebnen Auflösung erreicht wird, erhellet so: Es kann keine der gefundenen Complexio-

plexionen ſchlechtgeordnet ſeyn, weil ſie als Zahlen betrachtet, gutgeordnete Zahlen ſind (§. 8.) und es kann keine fehlen, weil ſonſt nicht nach §. 8. alle gutgeordnete Zahlen gefunden würden, die ſich mit 1, 2, 3, 4, 5... ſchreiben laſſen. Für die Buchſtabencomplexionen erhellet die Richtigkeit daraus, daſs nach dem gegebenen Zeiger allemal ein ſpäterer Buchſtabe des Alphabeths mit einer ſpätern Zifer des Syſtems correſpondirt und daſs ſich keine gutgeordnete Buchſtabencomplexion denken läſst, der nicht eine gutgeordnete Zahlencomplexion zugehörte.

Beiſpiele.

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ a, & b, & c, & d, & e\end{matrix}\right)$$

'A	a	b	c	d	e
'B	aa	ab	ac	ad	ae
		bb	bc	bd	be
			cc	cd	ce
				dd	de
					ee
'C	aaa	aab	aac	aad	aae
		abb	abc	abd	abe
			acc	acd	ace
				add	ade
					aee
		bbb	bbc	bbd	bbe
			bcc	bcd	bce
				bdd	bde
					bee
			ccc	ccd	cce
				cdd	cde
					cee
				ddd	dde
					dee
					eee
'D	aaaa	aaab	aaac	aaad	aaae
		aabb	aabc	aabd	aabe
			aacc	aacd	aace
				aadd	aade
					aaee
		abbb	abbc	abbd	abbe
			abcc	abcd	abce
				abdd	abde
	u.		ſ.		w

'A	1	2	3	4	5
'B	11	12	13	14	15
		22	23	24	25
			33	34	35
				44	45
					55
'C	111	112	113	114	115
		122	123	124	125
			133	134	135
				144	145
					155
		222	223	224	225
			233	234	235
				244	245
					255
			333	334	335
				344	345
					355
				444	445
					455
					555
'D	1111	1112	1113	1114	1115
		1122	1123	1124	1125
			1133	1134	1135
				1144	1145
					1155
		1222	1223	1224	1225
			1233	1234	1235
				1244	1245
	u.		ſ.		w.

2)

α) *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Die gegebenen Elemente a, b, c, d, ... schreibe man in eine Horizontalreihe, wie sie im Alphabethe auf einander folgen, diese machen die erste Classe aus.

2) Man setze allen Unionen den Buchstaben a vor, so hat man die Binionen der Ordnung a. Hierauf schreibe man vor die Union b und alle folgende das Element b, dies giebt die Binionen der Ordnung b. Dann setze man vor die Union c und alle folgende das Element c, so erhält man die Binionen der Ordnung c. Dieses Verfahren setze man so lange fort bis man der vorletzten und letzten Union das vorletzte Element und endlich der letzten Union das letzte Element vorgeschrieben hat. Diese gefundenen Binionen geben die zweite Klasse.

3) Allen Binionen der zweiten Klasse schreibe man a vor, darauf setze man vor alle Binionen der Ordnung b und alle folgende das Element b, dann schreibe man den Binionen der Ordnung c und den folgenden das Element c vor u. s. w. bis man den Binionen der Ordnung des vorletzten und letzten Elements das vorletzte Element und den Binionen der Ordnung des letzten Elements, dieses letzte Element vorgesetzt hat. Die hierdurch erhaltenen Ternionen machen die dritte Klasse.

4) Auf die nämliche Weise, wie die dritte Klasse aus der zweiten gefunden wird, leite man die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten und so überhaupt die nte Klasse aus der n — 1ten ab.

Die einzelnen Klassen werden in der Ordnung unter einander gesetzt wie bei der ersten Auflösung angegeben ist.

Beweis.

Die Complexionen ſind gutgeordnet, weil bei ihrer Entwickelung nie ein ſpäterer Buchſtabe des Alphabets vor einen frühern geſchrieben wird. Es kann auch keine fehlen, weil die Anname, daſs eine übergangen wird, auf einen Satz führt, deſſen Unrichtigkeit gleich in die Augen fällt. Denn geſetzt es fehlte a a a... b b.. c c... y x, ſo müſste man durch die gegebene Auflöſung auch nicht b b.. c c.. y x und deswegen auch nicht c c... y x und ſo auch nicht y x erhalten, da doch dieſes der zweiten Vorſchrift zuwider iſt.

Hiehergehörige Beiſpiele ſind die vorhingegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die Darſtellung welche die jetzt gegebene Auflöſung giebt iſt eine Involution, nämlich in ſofern als ſie nicht nur die Combinationen der *m* Elemente a, b, c,...p, q, r, s, ſondern auch der m—1 Elemente a, b, c,...p, q, r, der m—2 Elemente a, b, c,... p, q u. ſ. f. ſo enthält, daſs in den Combinationsklaſſen für eine gröſsere Anzahl von Elementen, die für eine jede geringere Anzahl auf die Weiſe involvirt ſind, daſs ſich die Klaſſen für die geringere Anzahl von Elementen ſehr leicht durch ein Linienziehn ſämmtlich auf einmal evolviren laſſen. Die folgende Figur zeigt dies deutlich:

	1	2	3	
A	a	b	c	d
B	aa	ab bb	ac bc cc	ad bd cd dd
C	aaa	aab abb bbb	aac abc acc bbc bcc ccc	aad abd acd add bbd bcd bdd ccd cdd ddd
D	aaaa	aaab aabb	aaac aabc aacc	aaad aabd aacd aadd
	1	2	3	
	u.	s.	w.	

Es geschieht hier das Evolviren durch ein blosses Ziehn grader und zwar vertikaler Linien, denn wenn man die Figur von der Linken nach der Rechten betrachtet, so schneidet die Linie 11 die Combinationsklassen des Elements *a* ab, die Linie 22 trennt die Combinationsklassen der Elemente *a* und *b* u. s. f.

Prüft man diese Involution so wird man finden, dass sie alle Erfordernisse einer vollständigen Involution hat, (§. 13.) also dass sie wirklich eine ganz vollständige Involution ist. Denn dass sie die erste, zweite und vierte Erforderniss besitzt, fällt gleich in die Augen und dass ihr auch die dritte nicht fehlt lehrt eine genauere Betrachtung ebenfalls. Man muss sich nur in Rücksicht auf diese dritte, die beiden horizontalen Linien zwischen welchen sich eine jede einzelne Klasse befindet, weit genug aus einander gesetzt denken, um für die Fortsetzung dieser Klassen auf mehrere Elemente, Raum genug zu haben.

2. *Anmerkung.*

Diese Darstellung welche eine Involution für die Anzahl der Elemente ist, ist nicht auch eine Involution in Rücksicht auf die auf einander folgenden Klassen, denn sollte sie eine solche Involution seyn, so müsste das Ganze nur eine Klasse bilden und in dieser müssten dann die vorhergehenden sich so befinden, dass sie durch grade Linien leicht zu evolviren wären *a)*. Eine solche Involution giebt die nächstfolgende Auflösung.

3)

β) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze zuerst die gegebenen Elemente a, b, c, d... der Ordnung gemäss wie sie im Zeiger stehn, unter einander. Dies giebt die erste Klasse.

2) Man setze allen Unionen den Buchstaben a vor, so hat man die Binionen der Ordnung *a*. Aus diesen, von der an, die zwei verschiedene Anfangselemente hat, mache man die Binionen der Ordnung *b* indem man das erste Element in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Auf die nämliche Weise leite man aus den Binionen der Ordnung *b*, die der Ordnung *c*, aus diesen wieder die der Ordnung *d* ab u. s. w. so erhält man die zweite Klasse.

3) So wie die zweite Klasse aus der ersten abgeleitet ist, leite man auch die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten und so überhaupt die n—1te aus der n—2ten und die *n*te aus der n—1ten ab.

Beweis.

Diese zweite rein combinatorische Auflösung unterscheidet sich von der ersten bloss durch die Form ihrer Dar-

a) Diese Anmerkung giebt ein Beispiel für die erste des §. 13.

Darſtellung, folglich gilt für ſie auch der Beweis, der für die erſte Auflöſung gegeben iſt.

Beiſpiele.

	a a a a a a			1 1 1 1 1 1	
	a a a a a b	$\binom{1,\ 2,\ 3}{a,\ b,\ c}$		1 1 1 1 1 2	
	a a a a a c	A		1 1 1 1 1 3	A
	a a a a b b			1 1 1 1 2 2	
	a a a a b c			1 1 1 1 2 3	
u.	a a a a c c	B	u.	1 1 1 1 3 3	B
	a a a b b b			1 1 1 2 2 2	
	a a a b b c			1 1 1 2 2 3	
	a a a b c c			1 1 1 2 3 3	
	a a a c c c	C		1 1 1 3 3 3	C
	a a b b b b			1 1 2 2 2 2	
	a a b b b c			1 1 2 2 2 3	
ſ.	a a b b c c		ſ.	1 1 2 2 3 3	
	a a b c c c			1 1 2 3 3 3	
	a a c c c c	D		1 1 3 3 3 3	D
	a b b b b b			1 2 2 2 2 2	
	a b b b b c			1 2 2 2 2 3	
	a b b b c c			1 2 2 2 3 3	
	a b b b c c			1 2 2 3 3 3	
	a b c c c c		w.	1 2 3 3 3 3	
w.	a c c c c c	E		1 3 3 3 3 3	E
	b b b b b b			2 2 2 2 2 2	
	b b b b b c			2 2 2 2 2 3	
	b b b b c c			2 2 2 2 3 3	
	b b b c c c			2 2 2 3 3 3	
	u. ſ. w.			u. ſ. w.	

Anmerkung.

Bei der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung leitet man immer eine Klaſſe aus der andern her, indem man jede Complexion der folgenden aus einer Complexion der nächſtvorhergehenden macht und ſo jede Klaſſe ganz für ſich ſchreibt und die Darſtellung die man dadurch erhält iſt eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente.

Bei

Bei der **zweiten** rein combinatoriſchen Auflöſung hingegen, hat man bei der Ableitung einer Klaſſe aus der vorhergehenden nicht **beſtändig** ſein Auge auf die einzelnen Complexionen der vorhergehenden Klaſſe gerichtet, ſondern **nur** bei der Conſtruction der Complexionen der Ordnung a, die man dadurch findet, daſs man den ſämmtlichen Complexionen der vorhergehenden Klaſſe a vorſchreibt: denn ſobald man dieſe gefunden hat, leitet man aus ihnen, von einer beſtimmten an, die Complexionen der Ordnung b durch eine bloſse Umtauſchung des erſten Elements in das nächſtfolgende des Zeigers her und auf die nämliche Weiſe folgert man hieraus wieder die der Ordnung c u. ſ. w. Wenn man alſo die Complexionen der erſten Ordnung einer gewiſſen Klaſſe hat, ſo macht man es bloſs zu ſeinem Geſchäfte immer Ordnungen aus Ordnungen, nächſtfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden abzuleiten. Die Darſtellung welche dieſes Verfahren giebt iſt eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die auf einander folgenden Klaſſen.

Aus dieſer Vergleichung der beiden rein combinatoriſchen Auflöſungen werden die weſentlichen Merkmale wodurch ſie ſich von einander unterſcheiden hinreichend in die Augen fallen.

1. *Zuſatz.*

Es folgt aus beiden rein combinatoriſchen Auflöſungen, dieſe Gleichung:

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E + 'F + \cdots + '\mathfrak{N}.$$
$$\binom{a,\ b,\ c,\ d\ \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}$$

Bezeichnet man die vierte Klaſſe mit $\overset{0}{D}$ und dieſem gemäſs (§. 12, 8. Erkl.) die dritte mit $\overset{-1}{D}$, die zweite mit $\overset{-2}{D}$, die erſte mit $\overset{-3}{D}$, ſo erhält man, wenn die Involution bis zur vierten Klaſſe entwickelt gedacht wird, die

Gleichung $'J = '\overset{-3}{D} + '\overset{-2}{D} + '\overset{-1}{D} + '\overset{-0}{D}$. Im allgemeinen kann man daher setzen $'J = '\overset{-(n-1)}{\mathfrak{N}} + '\overset{-(n-2)}{\mathfrak{N}} + \ldots + '\overset{-4}{\mathfrak{N}} + '\overset{-3}{\mathfrak{N}} + '\overset{-2}{\mathfrak{N}} + '\overset{-1}{\mathfrak{N}} + '\overset{-0}{\mathfrak{N}}$.

2. *Zusatz.*

Bedient man sich bei der zweiten rein combinatorischen Auflösung in Rücksicht auf das Element *a* der Wiederholungsexponenten (§. 12. 1te Erkl.) so erhält man für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3}{a,\ b,\ c}$, wenn man die Involution bis zur vierten Klasse entwickelt, diese Relation:

a a a a a		a^5		a^5
a a a a b		a^4 b		
a a a a c		a^4 c		$a^4\ 'A$
a a a b b		a^3 bb		
a a a b c		a^3 bc		$a^3\ 'B$
a a a c c		a^3 cc		
a a b b b		a^2 bbb		
a a b b c	=	a^2 bbc	=	$a^2\ 'C$
a a b c c		a^2 bcc		
a a c c c		a^2 ccc		
a b b b b		a^1 bbbb		
a b b b c		a^1 bbbc		
a b b c c		a^1 bbcc		$a^1\ 'D$
a b c c c		a^1 bccc		
a c c c c		a^1 cccc		
b b b b b		a^0 bbbbb		
b b b b c		a^0 bbbbc		
b b b c c		a^0 bbbcc		$a^0\ 'E$
b b c c c		a^0 bbccc		
b c c c c		a^0 bcccc		$\binom{2,\ 3}{b,\ c}$
c c c c c		a^0 ccccc		

Diese giebt die Gleichung

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3}{a,\ b,\ c}}{'J} = a^5 + a^4\ \underset{\binom{2,\ 3}{b,\ c}}{'A} + a^3\ 'B + a^2\ 'C + a^1\ 'D + a^0\ 'E.$$

welche sich allgemein so ausdrücken läßt:

$'J =$

$$ {}'J_{\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots}} = a^n + a^{n-1}\,{}'A_{\binom{2,\,3,\,4,\,5\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\,\ldots}} + a^{n-2}\,{}'B + \ldots + a^0\,{}'\mathfrak{N}. $$

Der Zeiger unter ${}'J$ bezieht ſich auf die ganze Involution, hingegen der andere, nur auf die Klaſſen ${}'A$, ${}'B$, ${}'C$, u. ſ. w.

Da die zweite rein-combinatoriſche Auflöſung allemal eine Klaſſe darſtellt welche alle vorhergehende involvirt enthält, ſo läſst ſich ihre Darſtellung im allgemeinen durch ${}'J\,{}'\mathfrak{N}$ (Involution der nten Klaſſe) bezeichnen und hiernach erhält man aus der zuletzt gegebenen Gleichung folgende:

$$ {}'J\,{}'\mathfrak{N}_{\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots}} = a^n + a^{n-1}\,{}'A_{\binom{2,\,3,\,4,\,5\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\,\ldots}} + a^{n-2}\,{}'B + \ldots + a^0\,{}'\mathfrak{N}. $$

Dieſe Gleichung lehrt alle Klaſſen für den Zeiger $\binom{2,\,3,\,4,\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,\ldots}$, nach einem beſtimmten Geſetze, welches ſie deutlich vor Augen legt, in eine einzige Klaſſe für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d,\,\ldots}$ zu vereinigen. Wie hierbei die Klaſſen ${}'A, {}'B, {}'C$, u. ſ. w. und deren Complexionen $\binom{2,\,3,\,4\,\ldots}{b,\,c,\,d,\,\ldots}$ zu ordnen ſind, zeigt eine Betrachtung der drei vorhin aufgeſtellten Figuren hinreichend.

Anmerkung.

Dies giebt eine Abkürzung der zweiten rein combinatoriſchen Auflöſung wenn durch ſie eine beſtimmte Klaſſe für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots}$ angegeben werden ſoll.

3. Zu-

3. Zusatz.

Substituirt man in der letzten Gleichung des zweiten Zusatzes für jedes Buchstabenelement das nachfolgende des Zeigers, so erhält man

$$1)\ {}^{\prime}J^{\prime}\mathfrak{N} = b^{n} + b^{n-1\prime}A + b^{n-2\prime}B + \ldots + b^{0\prime}\mathfrak{N}$$

$$\begin{pmatrix}2, 3, 4, 5, \ldots\\ b, c, d, e \ldots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3, 4, 5. 6. \ldots\\ c, d, e, f \ldots\end{pmatrix}$$

Hieraus bekömmt man wieder auf die nämliche Weise die Gleichung

$$2)\ {}^{\prime}J^{\prime}\mathfrak{N} = c^{n} + c^{n-1\prime}A + c^{n-2\prime}B + \ldots + c^{0\prime}\mathfrak{N}.$$

$$\begin{pmatrix}3, 4, 5, 6 \ldots\\ c, d, e, f \ldots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4, 5, 6, 7 \ldots\\ d, e, f, g \ldots\end{pmatrix}$$

u. s. w.

Sagt man daher von einem Zeiger, dessen *m*tes Buchstabenelement allemal das *m*—1te eines andern Zeigers ist, dass er diesem Zeiger zunächst vorhergeht, so lässt sich der Satz, welchen der zweite Zusatz lehrt, allgemein so ausdrücken: Wenn die erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. bis zur *n*ten Klasse für einen gewissen Zeiger gegeben sind, so kann man aus diesen sämmtlich eine einzige Klasse nämlich die *n*te des nächstvorhergehenden Zeigers machen und zwar nach einer und derselben Regel und umgekehrt, wenn die *n*te Klasse für irgend einen Zeiger gegeben ist, so lässt sich diese in eine Reihe von Klassen, nämlich in die erste bis zur *n*ten des nächstfolgenden Zeigers verwandeln.

4. Zusatz.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass man im Stande ist eine Reihe von Klassen für einen gewissen Zeiger auf eine einzige Klasse irgend eines vorhergehenden Zeigers zu reduciren und so umgekehrt. Am leichtesten lässt sich

sich dieses durch eine Gleichung darthun, es soll daher eine Gleichung zwischen der nten Klasse für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots\\ a, & b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ und den ersten n Klassen für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}4, & 5, & 6, & 7\ldots\\ d, & e, & f, & g\ldots\end{smallmatrix}\right)$ entwickelt werden.

Die erste Gleichung des 3ten Zusatzes giebt:

$$ {}'J{}'A_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4,\ldots\\ b, & c, & d,\ldots\end{smallmatrix}\right)} = b^1 + b^0\,{}'A_{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)} = {}'A_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)} $$

$$ {}'J{}'B_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)} = b^2 + b^1\,{}'A + b^0\,{}'B_{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)} = {}'B_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)} $$

$$ {}'J{}'C_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)} = b^3 + b^2\,{}'A + b^1\,{}'B + b^0\,{}'C_{\left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right)} = {}'C_{\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)} $$

u. s. w. u. s. w.

Setzt man diese Werthe der Klassen ${}'A$, ${}'B$, ${}'C$, für $\left(\begin{smallmatrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ die nämlichen Klassen in die letzte Gleichung des zweiten Zusatzes, so erhält man

$$ {}'J{}'\mathfrak{N}_{\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)} = a^n + a^{n-1}\left[\begin{matrix} b^1\\ +b^0\,{}'A\end{matrix}\right. + a^{n-2}\left[\begin{matrix} b^2\\ +b^1\,{}'A\\ +b^0\,{}'B\end{matrix}\right. + a^{n-3}\left[\begin{matrix} b^3\\ +b^2\,{}'A\\ +b^1\,{}'B\\ +b^0\,{}'C\end{matrix}\right. + \ldots $$

$$ \left(\begin{smallmatrix}3, & 4, & 5\ldots\\ c, & d, & e\ldots\end{smallmatrix}\right) $$

Die zweite Gleichung des 3ten Zuſatzes giebt

$$'J'\!\underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{A} = c^1 + c^0\,\underset{\left(\begin{smallmatrix}4,\,5,\,6\\ d,\,e,\,f\end{smallmatrix}\right)}{'A} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'A}$$

$$'J'\!\underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{B} = c^2 + c^1\,'A + c^0\,\underset{\left(\begin{smallmatrix}4,\,5,\,6\ldots\\ d,\,e,\,f,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'B} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'B}$$

$$'J'\!\underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{C} = c^3 + c^2\,'A + c^1\,'B + c^0\,\underset{\left(\begin{smallmatrix}4,\,5,\,6,\ldots\\ d,\,e,\,f,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'C} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'C}$$

Werden in die Gleichung*, für $\underset{\left(\begin{smallmatrix}3,\,4,\,5\ldots\\ c,\,d,\,e\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'A,\ 'B,\ 'C,}$ die dafür jetzt entwickelten Werthe geſetzt, ſo bekömmt man:

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3\ldots\\ a,\,b,\,c\ldots\end{smallmatrix}\right)}{'J'N} = a^n + a^{n-1}\left\{\begin{matrix} b^1 \\ +b^0\left\{\begin{matrix} c^1 \\ +c^0\,'A\end{matrix}\right.\end{matrix}\right. + a^{n-2}\left[\begin{matrix} b^2 \\ +b^1\left\{\begin{matrix} c^1 \\ +c^0\,'A\end{matrix}\right. \\ +b^0\left\{\begin{matrix} c^2 \\ +c^1\,'A \\ +c^0\,'B\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$+a^{n-3}\left[\begin{matrix} b^3 \\ +b^2\left\{\begin{matrix} c^1 \\ +c^0\,'A\end{matrix}\right. \\ +b^1\left\{\begin{matrix} c^2 \\ +c^1\,'A \\ +c^0\,'B\end{matrix}\right. \\ +b^0\left\{\begin{matrix} c^3 \\ +c^2\,'A \\ +c^1\,'B \\ +c^0\,'C\end{matrix}\right.\end{matrix}\right. + \ldots,\ -\ -\qquad \left(\begin{smallmatrix}4,\,5,\,6,\,7\ldots\\ d,\,e,\,f,\,g\ldots\end{smallmatrix}\right)$$

dieſe

H Der Buchbinder muſs aus den erſten 6 Bogen die Blätter weg
H Blätter gehörig einbinden, welche dieſer Bogen enthält,

Diese Gleichung ist die Gesuchte; sie ist zwar nur bis auf das vierte Glied entwickelt, es liegt doch aber schon das allgemeine Gesetz nach welchen die Glieder weiter fortlaufen hinreichend vor Augen. Das $m+1$te Glied, wenn man es nach diesem Gesetze in horizontalen Reihen darstellt, ist folgendes:

$$a^{n-m}(b^m + b^{m-1}(c^1 + c^0\,'A) + b^{m-2}(c^2 + c^1\,'A + c^0\,'B) + b^{m-3}(c^3 + c^2\,'A + c^1\,'B + c^0\,'C) + \ldots + b^0(c^m + c^{m-1}\,'A + c^{m-2}\,'B + \ldots + c^0\,'\mathfrak{M}))$$

5. *Zusatz.*

Das Verhältniss in welcher eine Klasse eines gewissen Zeigers mit der nächstvorhergehenden des nämlichen Zeigers steht, und daher auch die Entstehung einer Klasse aus der nächstvorhergehenden kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden.

1) Die erste rein combinatorische Auflösung leitet die nte Klasse des Zeigers $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ aus der $n-1$ten ebendesselben Zeigers auf diese Weise her: es wird zuerst den sämmtlichen Complexionen der $n-1$ten Klasse das Element a vorgeschrieben, hierauf wird den Complexionen, welche sich mit b anfangen und den folgenden das Element b, ferner denen die c zum Anfangselemeute haben und den folgenden das Element c vorgesetzt u. s. w. (§. 24.).

2) Es ist der Inbegriff aller N—1tionen des Zeigers $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ gleich $\mathfrak{N}$; für eben denselben Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ ist der Inbegriff der N—1tionen, von der ersten an, die sich mit b anfängt gleich $'\mathfrak{N}'$ $\binom{2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$; eben so machen die

N—1tionen des nämlichen Zeigers von der ersten an, welche c zum Anfangselemente hat, die Klasse $'\mathfrak{N}\binom{3,\ 4,\ 5\ldots}{c,\ d,\ e\ldots}$ aus u. s. w.

Die Vergleichung dieser beiden Sätze giebt die verlangte Gleichung, nämlich diese:

$$\overset{0}{'\mathfrak{N}}\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots} = a\,\overset{-1}{'\mathfrak{N}}\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots} + b\,\overset{-1}{'\mathfrak{N}}\binom{2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d\ldots} + c\,\overset{-1}{'\mathfrak{N}}\binom{3,\ 4,\ 5\ldots}{c,\ d,\ e\ldots}$$
$$d\,'\mathfrak{N}\binom{4,\ 5,\ 6\ldots}{d,\ e,\ f\ldots} + e\,'\mathfrak{N}\binom{5,\ 6,\ 7\ldots}{e,\ f,\ g\ldots} + \ldots$$

6. *Zusatz.*

Es lassen sich die n—1ten Klassen für die Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$, $\binom{2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$, $\binom{3,\ 4,\ 5\ldots}{c,\ d,\ e\ldots}$ u. s. w. sämmtlich auf eine einzige Klasse nämlich auf die *n*te des Zeigers $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ reduciren. *a*).

7. *Zusatz.*

Die im 5ten Zusatze entwickelte Gleichung, stellet folgendes deutlich vor Augen:

1) Die *n*te Klasse besitzt so viele Complexionen der Ordnung *a*, als die n—1te Klasse Complexionen überhaupt hat.

2) Die *n*te Klasse enthält so viele Complexionen der Ordnung *b* als die n—1te Klasse noch ausser denen der Ordnung *a* besitzt.

3)

a) Es ist hierbei aber zu bemerken, dass sich ein jeder Zeiger mit dem Buchstabenelemente endigen muss, womit sich der Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ endigt.

3) Der *n*ten Klaſſe kommen ſo viele Complexionen der Ordnung *c* zu als die n—1te Klaſſe noch auſser denen der Ordnung *a* und *b* hat. u. ſ. w.

Es gilt daher folgende allgemeine Regel: wenn man wiſsen will wie viele Complexionen der Ordnung *p* die *n*te Klaſſe hat, ſo braucht man nur zu zählen wie viele Complexionen von der Ordnung *p* und den folgenden Ordnungen die n—1te Klaſſe beſitzt.

Hiernach läſst ſich leicht eine Figur ſchreiben, welche für eine beſtimmte Anzahl combinirter Elemente deutlich angiebt wie viele Complexionen von jeder Ordnung eine jede Klaſſe enthält, denn man hat nur nöthig zuerſt eine Reihe von Einſen neben einander zu ſchreiben welche ſich auf die Unionen beziehn und hieraus nach jener allgemeinen Vorſchrift eine zweite zu folgern deren einzelne Glieder die Anzahl der Binionen jeder Ordnung angiebt u. ſ. w. wie dieſe Figur zeigt:

	e	d	c	b	a
'A	1	1	1	1	1
'B	1	2	3	4	5
'C	1	3	6	10	15
'D	1	4	10	20	35
'E	1	5	15	35	70

.

Es ſind hierbei die fünf verſchiedenen Elemente a, b, c, d, e als die combinirten angenommen und daher neben einander über die erſte Zahlenreihe geſetzt. Die Zahlen die ſich mit einem dieſer Buchſtaben in der nämlichen Vertikalreihe befinden, beſtimmen wie viele Complexionen der Ordnung dieſes Buchſtabens, die danebenſtehende Klaſſe in ſich begreift. Hiernach zeigt z. B. in der vierten Horizontalreihe die Zahl 20 an, daſs die Klaſſe 'D, 20 Complexionen der Ordnung *b* enthält.

Vergleicht man die horizontalen Zahlenreihen mit einander so biethet sich ein noch einfacheres Gesetz dar die nächstfolgende aus der vorhergehenden herzuleiten als das zuerst gegebene ist, wovon aber doch dieses einfachere bloss als eine Folgerung angesehn werden kann. Das Gesetz ist folgendes: Wenn man das *p*te Glied der *m*ten Reihe haben will, so addirt man das *p*—1te Glied der *m*ten Reihe zum *p*ten Gliede der *m*—1ten Reihe. Es kann also die Figur auf eine leichte Weise so weit fortgesetzt und auch auf so viele Elemente ausgedehnt werden, als man will. Um das letzte zu können braucht man nur zuerst die erste horizontale Zahlenreihe fortzusetzen.

Wenn man die Figur ansieht, so fällt sogleich in die Augen, dass die *m*te vertikale Zahlenreihe mit der *m*ten horizontalen völlig übereinstimmt, es läfst sich daher auch die Figur nach jenem Gesetze durch ein Schreiben vertikaler Zahlenreihen neben einander construiren, so dass man zuerst alle Zahlen schreibt, welche sich auf die Complexionen der Ordnung des letzten, hierauf die welche sich auf die Complexionen der Ordnung des vorletzten Elements beziehn u. s. w. Es kann also die Figur nach einer und derselben Regel auf doppelte Weise construirt werden, man geht nämlich entweder immer von einer Reihe für eine Klasse zu der Reihe für die nächstfolgende Klasse oder man geht von einer Reihe für die nächstfolgende Ordnung zu der Reihe für die nächstvorhergehende Ordnung über.

In der Natur des Gesetzes, nach welchen hier immer die nächstfolgende Reihe aus der nächstvorhergehenden abgeleitet wird, liegt die Gewissheit, das einer jeden ein allgemeines endliches Glied zukömmt. Die allgemeinen Glieder sind diese: Das *n*te Glied der ersten Reihe ist 1, das der zweiten $\frac{n}{1}$ das der dritten gleich $\frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2}$, das der vierten gleich $\frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w.

Für

Für r Elemente a, b, c, d, ... x, y, z hat man daher diese Figur:

	z	y	x	w	v		a
'A	1	1	1	1	1		1
'B	1	2	3	4	5		$\frac{r}{1}$
'C	1	3	6	10	15		$\frac{r.r+1}{1.2}$
'D	1	4	10	20	35		$\frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}$
'E	1	5	15	35	70		$\frac{r.r+1.r+2.r+3}{1.2.3.4}$
"	"	"	"	"	"		" " " "

§. 25.

Lehrsatz.

Bei r verschiedenen Elementen ist die Anzahl der Complexionen der mten Combinationsklasse mit Wiederholungen, gleich

$$\frac{r \,.\, r+1 \,.\, r+2 \,.\, r+3 \,\ldots\, (r+m-2)\,(r+m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,\ldots\, m-1 \,.\, m}$$

Beweis.

Es kommen der m—1ten Klasse so viele Complexionen überhaupt zu, als die mte Klasse Complexionen der Ordnung a hat (§. 24, 7. Zus. (1)). Bedeutet also nc, *numerus complexionum*, so ist nach der letzten Figur des §. 24.

$$nc\,'A = r \qquad nc\,'B = \frac{r.r+1}{1.2},$$

$$nc\,'C = \frac{r.r+1.r+2}{1.2.3} \text{ und so überhaupt } nc.\,'M$$

$$= \frac{r \;.\; r+1 \;.\; r+2 \;.\; r+3 \;\ldots (r+m-2)\,(1+m-r)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,\ldots\ldots\, m-1 \quad m}$$

 β) Von

β) Von den Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 26.

Aufgabe.

Es werden die Combinationen ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b\ \ c,\ d\ldots}$ verlangt.

α) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die Unionen neben einander, dies giebt A'.

2) Man setze dem Elemente *b* und den folgenden, *a* vor; hierauf schreibe man dem Elemente *c* und den folgenden, *b* vor; dann setze man vor *d* und die folgenden Elemente den Buchstaben *c* u. s. w. so bekömmt man B'.

3) Aus B' leite man die Ternionen der Ordnungen a, b, c, d, u. s. w. her indem man allen Binionen mit dem Anfangselemente *b* und den folgenden Binionen, den Buchstaben *a*; den Binionen die sich mit c, d, e u. s. f. anfangen, den Buchstaben b vorsetzt u. s. w. Dies giebt C'.

4) Auf die nämliche Weise, wie man C' aus B' findet, erhält man wieder D' aus C', E' aus D' u. s. w.

Die einzelnen Klassen schreibt man in der Ordnung wie man sie bekömmt unter einander.

Beweis.

Dass man durch diese Auflösung keine Combinationen mit Wiederholungen bekömmt, erhellet aus ihren vorgeschriebenen Verfahren hinreichend; dass sie aber auch alle Combinationen ohne Wiederholungen giebt, sieht man daraus, weil aus der Annahme des Gegentheils eine

eine Abſurdität folgt. Denn geſetzt es fehlte *abcd*, ſo müſste auch *bcd* und deswegen *cd* und aus dieſem Grunde *d* fehlen; dieſes iſt aber gegen die erſte Vorſchrift der Auflöſung.

Beiſpiele.

A`	a,	b,	c,	d,	e
B`		ab	ac bc	ad bd cd	ae be ce de
C`			abc	abd acd bcd	abe ace ade bce bde cde
D`				abcd	abce abde acde bcde
E`					abcde

A`	1,	2,	3,	4,	5
B`		12	13 23	14 24 34	15 25 35 45
C`			123	124 134 234	125 135 145 235 245 345
D`				1234	1235 1245 1345 2345
E`					12345

1, 2, 3, 4
a, b, c, d

Anmerkung.

Die Darſtellung welche die Auflöſung giebt iſt eine Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente und das Evolviren geſchieht durch grade vertikale Linien. Die hierunterſtehende Figur wird dies deutlich zeigen.

A`	a	b	c	d
B`		ab	ac bc	ad bd cd
C`			abc	abd acd bcd
D`				abcd

Hiermit vergleiche man (§. 24, a Rein comb. Aufl. 1. Anmerk.)

Zusatz.

Die Art und Weise wie nach der gegebenen Auflösung immer eine Klasse aus der nächstvorhergehenden hergeleitet wird, lässt sich allgemein durch eine Gleichung darstellen.

$$\overset{n}{N}'\binom{1,2,3\,..}{a,b,c\,..} = a\,\overset{n-1}{N}'\binom{2,3,4\,..}{b,c,d\,..} + b\,\overset{n-1}{N}'\binom{3,4,5\,..}{c,d,e\,..} + c\,\overset{n-1}{N}'\binom{4,5,6\,..}{d,e,f\,..} + d\,\overset{n-1}{N}'\binom{5,6,7\,..}{e,f,g\,..} + \,..$$

Diese Gleichung lehrt aus den $n-1$ten Klassen für die Zeiger $\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}$ $\binom{3,\,4,\,5\,..}{c,\,d,\,e\,..}$ $\binom{4,\,5,\,6\,..}{d,\,e,\,f\,..}$, u. s. w. eine einzige, nämlich die *n*te Klasse für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}$ zu machen.

2)

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die Elemente, wie sie im Zeiger folgen in einer Reihe unter einander, so hat man A'

2) Man setze allen, *a* ausgenommen, das Element *a* vor, so hat man die Binionen der Ordnung *a*. Aus den Binionen der Ordnung *a* leite man die der Ordnung *b* her indem man von der an, die *c* zum zweiten Elemente hat, *a* in *b* verwandelt. Aus diesen Binionen der Ordnung *b* folgere man die der Ordnung *c* indem man von der an, welche sich mit *d* endigt für das Element *b* das nächstfolgende *c* setzt. Auf ähnliche Weise leite man aus den Binionen der Ordnung *c*, die der Ordnung *d*; aus diesen wieder die der Ordnung *e* her, u. s. w. und setze diese Binionen der Ordnungen b, c, d u. s. w. wie man

man ſie findet unter die der Ordnung a. Die gefundenen Binionen machen die Klaſſe B'.

3) Allen Binionen, die ſich nicht mit a anfangen ſchreibe man a vor. Aus den hierdurch entſtandenen Ternionen der Ordnung a, leite man von der an die mit ac anfängt dadurch die Binionen der Ordnung b her, daſs man ihr erſtes Element a in b verwandelt. Aus dieſen Ternionen der Ordnung b folgern man wieder, von der an, die ſich mit bd anfängt, durch eine Subſtitution der c für b, die Ternionen der Ordnung c. Und ſo leite man überhaupt aus den Ternionen der Ordnung des nten Elements, die Ternionen des $n+1$ten Elements ab, daſs man von der an, deren beide erſte Elemente nicht zwei zunächſt auf einander folgende des Zeigers ſind, für das erſte Element das nächſtfolgende des Zeigers ſetzt. Dieſe Ternionen ſchreibe man bei ihrer Conſtruction ſo unter einander, wie es bei den Binionen geſchieht. Iſt die letzte Ternion hingeſchrieben, die man durch die gegebene Regel finden konnte, ſo hat man die Klaſſe C'.

4) Auf die nämliche Weiſe, wie man C' aus B' abgeleitet hat, leite man auch D' aus C', E' aus D' her u. ſ. w.

Beweis.

Wenn man dieſe Auflöſung mit der erſten vergleicht, ſo fällt ſogleich in die Augen, daſs beide das nämliche geben müſsen, und daſs daher auch die zweite Auflöſung richtig ſeyn muſs, weil es die erſte iſt.

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$

A`
a

B`
a|b
a|c
a|d
a|e

C`
a|b c
a|b d
a|b e
a|c d
a|c e
a|d e

D`
a|b c d
a|b c e
a|b d e
a|c d e

E`
a|b c d e

A`
1

B`
1|2
1|3
1|4
1|5

C`
1|2 3
1|2 4
1|2 5
1|3 4
1|3 5
1|4 5

D`
1|2 3 4
1|2 3 5
1|2 4 5
1|3 4 5

E`
1|2 3 4 5

Anmerkung.

Diese Darstellung ist keine Involution in Rücksicht auf die Klassen, auch ist sie nicht als eine Involution in Hinsicht auf die Anzahl der Elemente anzusehn (§. 24, 1te und 2te Anmerk.).

1. *Zusatz.*

Es ist

a
a|b
a|c
a|d
a|e
a|b c
a|b d
a|b e
a|c d
a|c e
a|d e
a|b c d
a|b c e
a|b d e
a|c d e
a|b c d e

=

a|
a|b
a|c
a|d
a|e
a|b c
a|b d
a|b e
a|c d
a|c e
a|d e
a|b c d
a|b c e
a|b d e
a|c d e
a|b c d e

=

a|
a|A`
a|B`
a|C`
a|D` $\binom{2,\ 3,\ 4,\ 5}{b,\ c,\ d,\ e}$

Die-

Dieſe Relation giebt die Gleichung

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3,\,4\,\ldots\\ a,\,b,\,c,\,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{A^{\backprime} + B^{\backprime} + C^{\backprime} + D^{\backprime} + \ldots + \mathfrak{N}^{\backprime}} =$$

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4,\,5\,\ldots\\ b,\,c,\,d,\,e\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{a + {}_aA^{\backprime} + {}_aB^{\backprime} + {}_aC^{\backprime} + {}_aD^{\backprime} + \ldots + {}_a\mathfrak{N}^{\backprime}},$$

welche lehrt, wie aus den Combinationen für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4,\,5\,\ldots\\ b,\,c,\,d,\,e\,\ldots\end{smallmatrix}\right)$ unmittelbar die für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3,\,4\,\ldots\\ a,\,b,\,c,\,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)$ erhalten werden können.

Die Vergleichung der erſten Figur mit der letzten führt auch noch auf dieſe Gleichungen;

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,2,3\,\ldots\\ a,b,c\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{A^{\backprime}} = a + \underset{\left(\begin{smallmatrix}2,3,4\,\ldots\\ b,c,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{A^{\backprime}},\quad \underset{\left(\begin{smallmatrix}1,2,3\,\ldots\\ a,b,c\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{B^{\backprime}} = {}_aA^{\backprime} + \underset{\left(\begin{smallmatrix}2,3,4\,\ldots\\ b,c,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{B^{\backprime}},$$

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,2,3\,\ldots\\ a,b,c\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{C^{\backprime}} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4\,\ldots\\ b,\,c,\,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}_aB^{\backprime} + C^{\backprime}},$$ u. ſ. w. ſo daſs $\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3\,\ldots\\ a,\,b,\,c\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{\overset{0}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}} =$

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4\,\ldots\\ b,\,c,\,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{{}_a\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime} + \overset{0}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}}$$ iſt. Hieraus erhellet wie überhaupt eine Klaſſe für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3\,\ldots\\ a,\,b,\,c\,\ldots\end{smallmatrix}\right)$ aus zwei zunächſt auf einander folgenden Klaſſen für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4\,\ldots\\ b,\,c,\,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)$ gemacht werden kann.

2. *Zuſatz.*

Die Gleichung $\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,2,3\,\ldots\\ a,b,c\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{\overset{0}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}} = a\underset{\left(\begin{smallmatrix}2,3,4\,\ldots\\ b,c,d\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}} + b\underset{\left(\begin{smallmatrix}3,4,5\,\ldots\\ c,d,e\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}} + c\underset{\left(\begin{smallmatrix}4,5,6\,\ldots\\ d,e,f\,\ldots\end{smallmatrix}\right)}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}^{\backprime}} + \ldots,$

welche ſich bei der erſten Auflöſung ſogleich darbiethet,

fol-

folgt aus der zweiten ebenfalls. Es ist hier der Ort von ihr Gebrauch zu machen.

Wenn man sie betrachtet, so lehrt sie ausser dem, was schon bei der ersten Auflösung bemerkt ist, noch folgendes:

1) Die *n*te Klasse der Elemente a, b, c, d u. s. w. besitzt so viele Complexionen der Ordnung *a*, als die n—1te ausser denen der Ordnung *a* besitzt.

2) Der *n*ten Klasse kommen so viele Complexionen der Ordnung *b* zu, als die n—1te ausser denen von der Ordnung *a* und *b* enthält.

3) Die *n*te Klasse hat so viele Complexionen der Ordnung *c* als die n—1te ausser denen der Ordnung a, b und c besitzt.

u. s. w.

Will man also überhaupt wissen, wie viele Complexionen der Ordnung *p* die *n*te Klasse hat, so braucht man nur zu zu zählen wie viele Complexionen von der Ordnung *q* und den folgenden Ordnungen in der n—1ten Klasse vorhanden sind. Hiernach läſst sich wie bei den Combinationen mit Wiederholungen (§. 24, 7. Zusatz) eine Figur zeichnen, die deutlich angiebt wie viele Complexionen einer jeden Ordnung eine jede Klasse enthält.

	f,	e,	d,	c,	b,	a
A	1	1	1	1	1	1
B	0	1	2	3	4	5
C	0	0	1	3	6	10
D	0	0	0	1	4	10
E	0	0	0	0	1	5
F	0	0	0	0	0	1

Die Einrichtung dieſer Figur iſt die nämliche wie bei der in §. 24. 7. Zuſatz.

Die Vergleichung der einzelnen horizontalen Zahlenreihen führt auf ein noch einfacheres Geſetz, allemal die folgende aus der nächſtvorhergehenden abzuleiten, als vorhin angegeben wurde, nämlich um das pte Glied der mten Reihe zu erhalten, braucht man nur die beiden p—1ten Glieder der mten und m—1ten Reihe zu addiren. Da nun die erſte Reihe nur Einſen enthält und jede der übrigen ſich mit 0 anfängt, ſo ſieht man leicht ein, daſs ſich die Figur durch eine ſehr einfache Addition ſo weit ausdehnen läſst, als man will.

In der angeführten Regel die nächſtfolgende Horizontalreihe aus der nächſtvorhergehenden herzuleiten liegt die Nothwendigkeit, daſs einer jeden der genannten Reihen ein allgemeines Glied zukömmt. Das n+1te Glied für die erſte Reihe iſt 1; für die zweite, n; für die dritte, $\frac{n.n-1}{1.2}$; für die vierte, $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$; für die fünfte, $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$ u. ſ. w. Man hat daher für rElemente a, b, c, . . . x, y, z dieſe Figur:

	z y x w v . . . a		
A	1 1 1 1 1 . . . 1		1
B	0 1 2 3 4 . . . r—1		r
C	0 0 1 3 6 . . .	$\frac{r-1.r-2}{1.2}$	$\frac{r.r-1}{1.2}$
D	0 0 0 1 4 . . .	$\frac{r-1.r-2.r-3}{1.2.3}$	$\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}$
"	" " " " " . . . "	"	" "

Von dieſer Figur wird in der Folge noch Gebrauch gemacht.

Dar-

Darstellung einzelner Klassen der Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 27.

Bei den Combinationen mit Wiederholungen giebt die zweite rein combinatorische Auflösung die gesuchten Klassen so, dass sie eine einzige Klasse bilden in der sie involvirt sind, es kann daher durch diese Auflösung auch sogleich jede verlangte einzelne Klasse prompt dargestellt werden. Es war daher nicht nöthig noch besondere Aufgaben für die Bestimmungen einzelner Klassen zu geben. Hingegen bei den Combinationen ohne Wiederholungen dürfen diese nicht übergangen werden, weil keine der beiden rein combinatorischen Auflösungen für die Bestimmung aller Klassen eine Involution in Rücksicht auf die Klassen ist. (§. 24, α, Rein comb. Aufl. 2, Anmerk.).

§ 28.

Aufgabe.

Es wird die mte Klasse der Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots}$ verlangt.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die ersten m Elemente des Zeigers gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erste Complexion

2) Für das letzte Element dieser Complexion setze man successiv die höhern Elemente, bis man auf das letzte des Zeigers kömmt.

3) In der zuletzt gefundenen Complexion verwandele man das vorletzte Element in das nächstfolgende des Zei-

Zeigers und schreibe das Element daneben, welches ihm im Zeiger folgt, und leite aus dieser Complexion wieder nach 2) andere her.

4) Ist dies geschehn, so verfahre man mit der letzten dieser Complexionen aufs neue wie es 3) vorschreibt und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort, bis man auf eine Complexion kömmt, deren vorletztes und letztes Element mit dem vorletzten und letzten des Zeigers einerlei sind.

5) Hierauf substituire man in der Complexion, die man zuletzt erhielt, für das vorvorletzte Element das nächstfolgende des Zeigers und schreibe neben das substituirte gutgeordnet die zwei Elemente, die von ihm, dem Zeiger nach, die nächsthöhern sind und wende auf diese Complexion wieder die Vorschriften von 2) 3) und 4) an.

6) Aus der letzten Complexion lasse man nach 5) wieder andere entstehn und setze dies so lange fort, bis die drei letzten gutgeordneten Elemente der Complexion die drei letzten des Zeigers sind.

7) Ist dies der Fall so nehme man in der zuletzt erhaltenen Complexion mit dem Elemente das dem vorvorletzten vorhergeht die Substitution vor, dass man für dasselbe das ihm im Zeiger zunächstfolgende schreibt und setze die Elemente, welche dem Zeiger nach von dem substituirten die drei nächsthöhern sind, gutgeordnet daneben und folgere hieraus nach 2, 3, 4, 5 und 6 wieder neue Complexionen.

8) Auf die zuletzt hierdurch gefundene Complexion, wende man dann wieder die Vorschrift von 7 an und fahre hiermit so lange fort, bis man auf eine Complexion kömmt, deren vier letzte gutgeordnete Elemente die vier letzten des Zeigers sind.

Hieraus erhellet ſchon hinreichend wie weiter zu verfahren iſt und daſs die ganz letzte Complexion eine gutgeordnete Mtion ſeyn wird, deren Elemente die *m* letzten des Zeigers ſind.

Beweis.

Die gefundenen Complexionen ſind gewiſs gutgeordnete Mtionen, es kann aber auch keine fehlen, weil der Mangel irgend einer auch den der zuerſt hingeſchriebenen vorausſetzt. Denn geſetzt es fehlte für die Elemente a, b, c, d, e, f, wenn von der dritten Klaſſe die Rede iſt, die Complexion a b e f, ſo müſste auch a b d f, ferner a b d e, a b c f, a b c e und ſo auch a b c d übergangen ſeyn, weil dieſe nach der gegebenen Auflöſung in umgekehrter Ordnung aus einander folgen.

Beiſpiele.

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g\end{pmatrix}$$

a b c d e	1 2 3 4 5
a b c d f	1 2 3 4 6
a b c d g	1 2 3 4 7
a b c e f	1 2 3 5 6
a b c e g	1 2 3 5 7
a b c f g	1 2 3 6 7
a b d e f	1 2 4 5 6
a b d e g	1 2 4 5 7
a b d f g	1 2 4 6 7
a b e f g	1 2 5 6 7
a c d e f	1 3 4 5 6
a c d e g	1 3 4 5 7
a c d f g	1 3 4 6 7
a c e f g	1 3 5 6 7
a d e f g	1 4 5 6 7
b c d e f	2 3 4 5 6
b c d e g	2 3 4 5 7
b c d f g	2 3 4 6 7
b c e f g	2 3 5 6 7
b d e f g	2 4 5 6 7
c d e f g	3 4 5 6 7

2)

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe das mte und die folgenden Elemente des Zeigers gutgeordnet unter einander.

2) Man ſetze jedem derſelben das m—1te Element des Zeigers vor und leite aus den hierdurch entſtandenen Binionen der Ordnung des m—1ten Elements die Binionen der Ordnung des mten, aus dieſen wieder die Binionen der Ordnung des m+1ten Elements ab u. ſ. f. und zwar dadurch, daſs man das erſte Element aller derjenigen Binionen in das nächſtfolgende des Zeigers verwandelt, deren zweites Element nicht in dem Zeiger zunächſt auf ihr erſtes folge.

3) Vor die gefundenen Binionen ſchreibe man das m—2te Element des Zeigers und folgere aus den hierdurch entſtandenen Ternionen wieder ſucceſſiv ſo die Ternionen der höhern Ordnungen, wie man aus den Binionen der Ordnung des m—1ten Elements die Binionen der Ordnungen der höhern Elemente bekömmt.

4) Sämmtlichen Ternionen ſchreibe man das m—3te Element des Zeigers vor und laſſe aus den dadurch erhaltenen Quaternionen wieder, nach dem in 2 und 3 angegebenen Ableitungsgeſetze, die Quaternionen höherer Ordnungen entſtehn.

5) Dieſes Verfahren ſetze man ſo lange fort als für den gegebenen Zeiger möglich iſt.

Beweis.

Es findet jedesmal eine gutgeordnete N—1tion ohne Wiederholungen ſtatt, (deren Elemente zu den m—1 letzten des Zeigers gehören), aus welcher ſich eine gegebene gutgeordnete Ntion ohne Wiederholungen, (deren Elemente aus den *m* letzten des Zeigers genommen ſind), dadurch machen läſst, daſs man ihr entweder bloſs das Element vorſchreibt, welches von dem letzten des Zeigers ange-

en welche ſich auf dieſen Bogen befinden und ſtatt ihrer die

angerechnet das mte ist, oder dass man für dieses vorgeschriebene successiv noch die nächsthöhern Elemente des Zeigers substituirt. Auf diese Weise leitet aber die Auflösung aus einer Klasse für die letzten p Elemente des Zeigers, allemal die nähsthöhere Klasse für die letzten $p + 1$ Elemente des Zeigers her; folglich ist klar, da die Auflösung, wenn der Zeiger q Elemente hat, zuerst die erste vollständige Klasse für die letzten $q - (m - 1)$ Elemente giebt, das sie auch die ganze zweite Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die letzten $q + 1 - (m - 1)$ Elemente, dass sie deswegen wieder die ganze dritte Klasse für die letzten $q + 2 - (m - 1)$ Elemente und das sie so endlich die mte Klasse für die letzten $q + (m - 1) - (m - 1)$ d. h. für alle Elemente des Zeigers geben muss.

Beispiele

$$\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}{a, b, c, d, e, f, g, h}$$

	a b c d e f	1 2 3 4 5 6	
	a b c d e g	1 2 3 4 5 7	
	a b c d e h	1 2 3 4 5 8	
	a b c d f g	1 2 3 4 6 7	
	a b c d f h	1 2 3 4 6 8	
	a b c d g h	1 2 3 4 7 8	
	a b c e f g	1 2 3 5 6 7	
	a b c e f h	1 2 3 5 6 8	
	a b c e g h	1 2 3 5 7 8	
	a b c f g h	1 2 3 6 7 8	
F'	a b d e f g	1 2 4 5 6 7	F'
	a b d e f h	1 2 4 5 6 8	
	a b d e g h	1 2 4 5 7 8	
	a b d f g h	1 2 4 6 7 8	
	a b e f g h	1 2 5 6 7 8	
	a c d e f g	1 3 4 5 6 7	
	a c d e f h	1 3 4 5 6 8	
	a c d e g h	1 3 4 5 7 8	
	a c d f g h	1 3 4 6 7 8	
	a c e f g h	1 3 5 6 7 8	
	a d e f g h	1 4 5 6 7 8	
	b c d e f g	2 3 4 5 6 7	
	" " "	" " "	

An-

Anmerkung.

Beide Auflöfungen geben für einen und denfelben Zeiger die nämliche Darftellung der mten Klaffe, allein das Verfahren, welches fie bei der Conftruction beobachten ift fehr verfchieden. Die erfte Auflöfung nämlich, geht gleich von der erften ganzen Complexion der mten Klaffe aus und geht von diefer fo weiter fort, dafs fie allemal die nächftfolgende ganze Complexion aus der nächftvorhergehenden herleitet; hingegen bei der zweiten Auflöfung ftellt man z. B, um $F'\binom{1,2,3,..8}{a,b,c,..h}$ zu erhalten, zuerft die erfte Klaffe für die Elemente f, g, h, auf, aus diefer folgert man die zweite Klaffe für die Elemente e, f, g, h, hieraus leitet man wieder die dritte Klaffe für die Elemente d, e, f, g, h ab u. f. w. und zwar fo, dafs man jedesmal bei den Uebergange zu einer höhern Klaffe alle vorhergende in diefe involvirt, und folglich ganz involutorifch verfährt.

§. 28.

Lehrfatz.

Für r verfchiedene Elemente ift die Anzahl der Complexionen der *m*ten Klaffe der Combinationen ohne Wiederholungen gleich

$$\frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \,\ldots\ldots\, (r-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, m}$$

Beweis.

Es ift in der Figur des zweiten Zufatzes zur zweiten Auflöfung in §. 26 allemal das r + 1te Glied irgend einer horizontalen Zahlenreihe gleich der Summe des 1ten, 2ten, 3ten u. f. w. des *r*ten Gliedes der nächftvorhergehenden Reihe. Da nun diefe Summe der Glieder einer Reihe die Anzahl aller Complexionen der danebenftehen-

 den

den Klaſſe beſtimmt, ſo erhellet aus der letzten Figur des §. 26, in welcher die Glieder der letzten Vertikalreihe die $r+1$ten Glieder der horizontalen Reihen ſind, zu welchen ſie gehören, daſs nc. $\overset{r}{A} = r$, nc. $\overset{r}{B} = \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2}$, nc. $\overset{r}{C} = \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. ſ. w. iſt und daſs überhaupt nc. $\overset{r}{\mathfrak{M}} = \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot r-3 \cdot \ldots \cdot (r-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots \cdot m}$ ſeyn muſs.

γ. Von den Combinationen zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen.

§. 29.

Aufgabe.

Es ſollen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & v \\ a, & b, & c, & d \ldots & n \end{pmatrix}$ alle Combinationen, mit Wiederholungen, zur Summe v gefunden werden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe v hin; dieſes Element macht die Klaſſe $\overset{v}{A}$.

2) Hieraus mache man nach den Regeln welche die Auflöſung der Aufgabe des §. 10 vorſchreibt, die zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. Die zweizifrigen geben die Klaſſe $\overset{v}{B}$, die dreizifrigen, die Klaſſe $\overset{v}{C}$, die vierzifrigen die Klaſſe $\overset{v}{D}$ u. ſ. w. Die

Die Subſtitution der Buchſtaben für die mit ihnen correſpondirenden Zifern giebt die geſuchten Buchſtabencombinationen.

Beweis.

Durch die Vorſchrift der Auflöſung der Aufgabe des §. 10 findet man hier gewiſs alle gutgeordnete Zahlen zur Summe ν und zwar zuerſt die einzifrige, dann die zweizifrigen, hierauf die dreizifrigen u. ſ. f. Eine jede dieſer Zahlen iſt eine Combination zur Summe ν und auſser ihnen kann gar keine Combination zur Summe ν gedacht werden, denn gäbe es eine ſolche Zahlencombination, ſo bildete dieſe eine Zahl zur Summe ν, welche nicht nach den Regeln der Auflöſung der gedachten Aufgabe gefunden werden könnte. Für die Zahlencomplexionen giebt alſo die einzifrige Zahl die Klaſſe $^{\nu}\mathrm{A}$, die zweizifrigen geben die Klaſſe $^{\nu}\mathrm{B}$, die dreizifrigen die Klaſſe $^{\nu}\mathrm{C}$ u. ſ. w. und da mit einer jeden Buchſtabencomplexion eine Zahlencomplexion correſpondirt, ſo iſt einleuchtend, daſs man durch die Subſtitution der Buchſtaben die verlangten Buchſtabencombinationen bekömmt.

Beiſpiele.

$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\\ a, & b, & c, & d, & e, & f\end{matrix}\right)$

f	$^{6}\mathrm{A}$	6	$^{6}\mathrm{A}$
ae bd cc	$^{6}\mathrm{B}$	15 24 33	$^{6}\mathrm{B}$
aad abc bbb	$^{6}\mathrm{C}$	114 123 222	$^{6}\mathrm{C}$
aaac aabb	$^{6}\mathrm{D}$	1113 1122	$^{6}\mathrm{D}$
aaaab	$^{6}\mathrm{E}$	11112	$^{6}\mathrm{E}$
aaaaaa	$^{6}\mathrm{F}$	111111	$^{6}\mathrm{F}$

2)

α) Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſetze das höchſte Element des Zeigers als einzelnes Ding hin, ſo hat man $\overset{\nu}{A}$.

2) Um die folgenden Klaſſen zu erhalten beobachte man die Regeln, nach welchen überhaupt aus der vorhergehenden Klaſſe, die nächſtfolgende gefunden wird.

α) Man ſchreibe allen Complexionen der vorhergehenden Klaſſe, welche ſich nicht mit mehrern unter ſich gleichen Elementen endigen, das erſte Element des Zeigers vor und ſetze für das letzte Element das im Zeiger nächſtvorhergehende.

β) Man ſuche unter den hierdurch gefundenen Complexionen, diejenigen auf, welche ſich ſo wenig mit mehrern gleichen Elementen anfangen als endigen und ſubſtituire für dieſer Complexionen erſtes Element das nächſtfolgende des Zeigers und für ihr letztes Element das nächſtvorhergehende des Zeigers.

γ) Aus dieſen jetzt gefundenen Complexionen ſuche man wieder auf die nämliche Weiſe, nämlich nach β andere zu erhalten und aus dieſen leite man wieder nach eben derſelben Regel andere ab und ſetze dieſes Verfahren überhaupt ſo lange fort als es ſich thun läſst.

Kann es nicht mehr fortgeſetzt werden, weil alle Complexionen worauf die Vorſchrift β) angewandt werden müſste, entweder mehrere gleiche Anfangs oder Endelemente oder beides zugleich haben, ſo hat man die ganze Klaſſe gefunden.

Be-

Beweis.

Dafs die Auflöfung nur gutgeordnete Complexionen zur Summe ν giebt ift einleuchtend; es braucht daher nur noch bewiefen zu werden, dafs man durch fie auch **alle** mögliche gutgeordnete Complexionen zur Summe ν bekömmt. Dies erhellet folgendermafsen: Gefetzt man fände durch fie eine gutgeordnete Ntion von der Ordnung a nicht, fo müfste man durch fie auch die N—1tion nicht finden, die entfteht, wenn man in der gedachten Ntion das erfte Element a wegftreicht und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fubftituirt (α). Fehlte eine Ntion der Ordnung b, fo müfste auch **die** Ntion der Ordnung a fehlen, die man aus der genannten Ntion der Ordnung b erhält, wenn man für ihr erftes Element den Buchftaben a und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fetzt (β). Hätte man aber diefe Ntion der Ordnung a nicht, fo fehlte wegen α) auch wieder eine N—1tion. Eben fo läfst fich überhaupt zeigen, dafs der Mangel irgend einer Ntion den Mangel einer N—1tion vorausfetzt. Findet man alfo durch die Auflöfung alle N—1tionen, fo erhält man durch fie auch alle Ntionen.

Man bekömmt aber durch fie gewifs ${}^{\nu}A$, folglich auch ${}^{\nu}B$ und aus diefem Grunde auch ${}^{\nu}C$ u. f. w. alle Klaffen, die für die Summe ν bei dem gegebenen Zeiger möglich find.

Hierhergehörige Beifpiele find die zur erften Auflöfung gegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöfung giebt eine Involution, in fo fern nämlich als fie nicht nur fucceffiv die erfte, 2te,

3te Klaſſe u. ſ. w. der Complexionen zur Summe ν, ſondern auch die Complexionen zur Summe $\nu-1$, $\nu-2$, $\nu-3$ u. ſ. f. darſtellt. Hat man nämlich durch die Auflöſung die Klaſſen der Complexionen zur Summe ν entwickelt, ſo braucht man nur um die Klaſſen zur Summe $\nu-m$ zu evolviren, dieſe Vorſchriften beobachten:

1) In der m ten Klaſſe ſchneide man das letzte Element der erſten Complexion aus, Dies iſt ${}^{\nu-m}A$.

In der m+2ten Klaſſe trenne man die beiden letzten Elemente jeder Complexion von den vorhergehenden Elementen durch einen Vertikalſtrich und ziehe unter die letzte Complexion, die ſich mit dem erſten Elemente des Zeigers anfängt einen Horizontalſtrich, ſo entſteht ein Winkel. Die Complexionen, welche dieſer Winkel enthält, machen ${}^{\nu-m}B$ aus.

3) In der m+3ten Klaſſe trenne man die drei letzten Elemente jeder Complexion von den vorhergehenden Elementen durch einen Vertikalſtrich und ziehe unter die letzte der Complexionen, die ſich mit dem erſten Elemente des Zeigers anfangen einen Horizontalſtrich, ſo erhält man einen Winkel, worinn die Ternionen enthalten ſind, welche ${}^{\nu-m}C$ ausmachen.

	8	
1	7	${}^{7}A$
	2 6	
	3 5	
	4 4	
1	1 6	${}^{7}B$
1	2 5	
1	3 4	
2	2 4	
2	3 3	
1	1 1 5	${}^{7}C$
1	1 2 4	
1	1 3 3	
1	2 2 3	
2	2 2 2	
1	1 1 1 4	${}^{7}D$
1	1 1 2 3	
1	1 2 2 2	
1	1 1 1 1 3	${}^{7}E$
1	1 1 1 2 2	
1	1 1 1 1 1 2	${}^{7}F$
1	1 1 1 1 1 1 1	${}^{7}G$

4) Man erhält überhaupt $^{\nu - m}\mathfrak{N}$, wenn man in der m + nten Klasse zwischen die letzten n Elemente und die, welche vor diesen stehn, einen Vertikalstrich zieht und dann die Complexionen, welche sich mit dem ersten Elemente des Zeigers anfangen von den darunterstehenden durch einen Horizontalstrich trennt.

2. *Anmerkung.*

Da die Involution wovon hier die Rede ist, die Complexionen zur bestimmten Summe klassenweise giebt, so nennt man sie eine *Klasseninvolution*, in Gegensatz einer andern (3) β, Rein comb. Aufl.) welche diese Complexionen nicht klassenweise darstellt.

Es ist aber die Klasseninvolution nur eine unvollständige Involution. (§. 13, Erklärung.).

Zusatz.

Es ist $^{n}J = {}^{n}A + {}^{n}B + {}^{n}C + {}^{n}D + {}^{n}E + \ldots + {}^{n}\mathfrak{N}$.

3.

β. *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man schreibe das Element hin, welches dem Zeiger nach das erste ist, so hat man die Complexion zur Summe 1.

2) Hieraus leite man die Complexionen zur Summe 2, aus diesen die Complexionen zur Summe 3, hieraus die Complexionen zur Summe 4 u. s. w. aus denen zur Summe $\nu - 1$ die zur Summe ν nach folgender Vorschrift her:

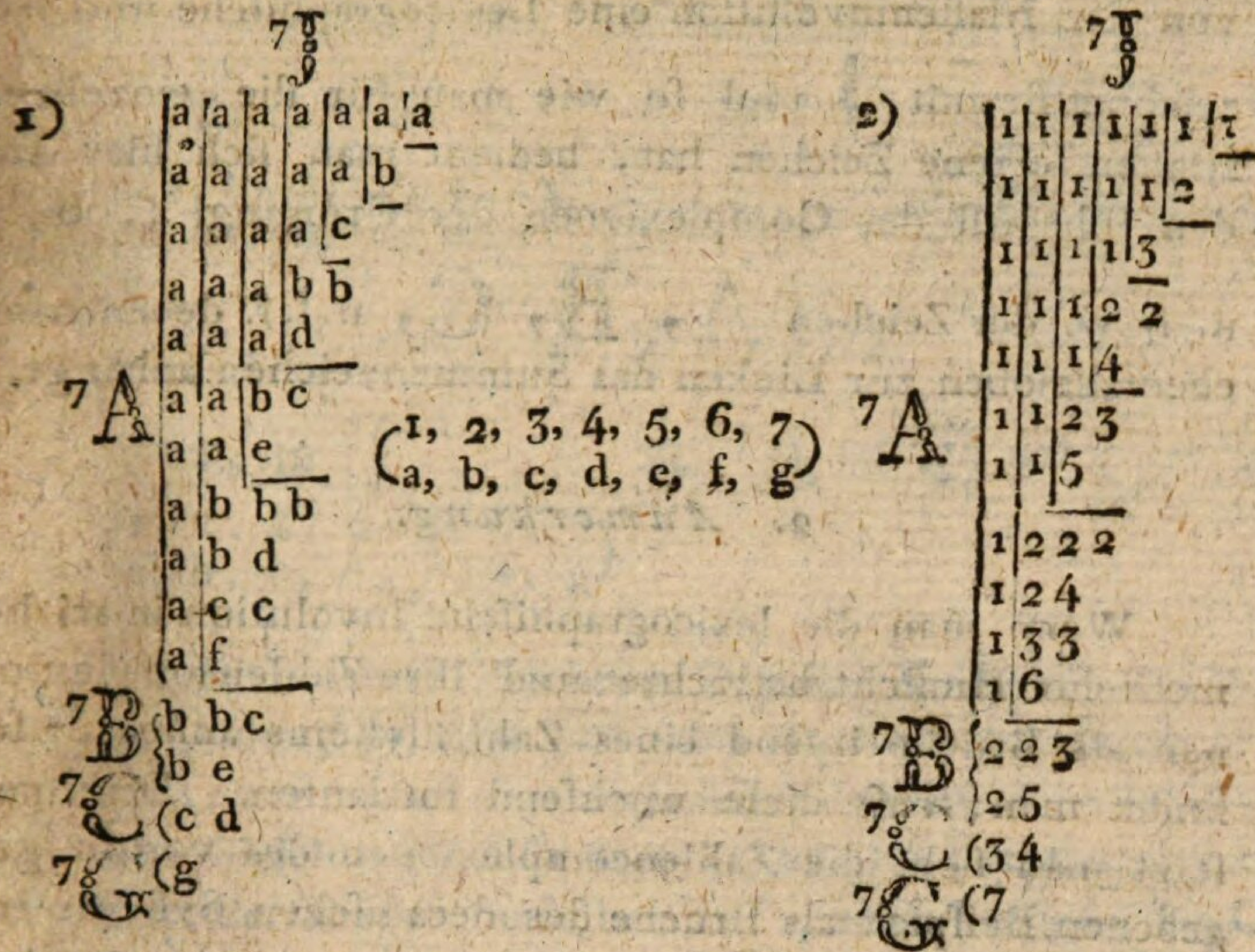
Man setzt vor alle Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe das erste Element des Zeigers, hierauf sucht

ſucht man unter denen welchen das erſte Element jezt vorgeſchrieben iſt, von der erſten an, die auf, deren zwei erſte Anfangselemente nicht unter ſich gleich ſind, ſchreibt für das erſte Element derſelben das nächſtfolgende des Zeigers und ſetzt die hierdurch gefundenen Complexionen, in der Ordnung wie ſie gefunden ſind unter die welche man vorher durch das Vorſetzen des erſten Elements des Zeigers erhalten hatte.

Beweis.

Die gutgeordneten Complexionen zu irgend einer Summe fangen ſich entweder mit dem erſten oder mit einem andern Elemente des Zeigers an. Im erſten Falle macht man daraus Complexionen zur nächſtvorhergehenden Summe, wenn man ihnen ihr erſtes Element nimmt und im zweiten Falle wenn man ihr erſtes Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers verwandelt, wodurch Complexionen mit zwei verſchiedenen Anfangselementen entſtehn. Hat man alſo alle gutgeordnete Complexionen zu irgend einer Summe, ſo erhält man durch ſie gewiſs alle zur nächſtfolgenden Summe, wenn man ihnen ſämmtlich das erſte Element des Zeigers vorſetzt und bei ſolchen, die verſchiedene Anfangselemente haben, für das erſte Element das nächſtfolgende des Zeigers ſchreibt. Da man nun durch die Auflöſung die Complexion zur Summe 1 zuverläſsig erhält, ſo findet man offenbar durch ſie auch alle Complexionen zur Summe 2 und deswegen wieder alle zur Summe 3 u. ſ. w. zur Summe $\nu - 1$ und daher auch alle zur Summe ν.

Beispiele.



1. Anmerkung.

Aus dem ganzen Gange, den die zweite rein combinatorische Auflösung zur Darstellung ihrer Complexionen nimmt, erhellet, daſs sie ebenfalls eine Involution in Rücksicht auf die Summe giebt und schon der erste Blick auf die beiden eben entwickelten Figuren lehrt, daſs diese Involution alle Erfordernisse einer vollständigen hat (§. 13, Erklärung). Ihre Complexionen ordnet sie aber nicht nach Klassen sondern ganz lexicographisch (a),

aus

a) Bei der Klasseninvolution gehn die Conplexionen jeder einzelnen Klasse auch lexicographisch fort, aber ihre Complexionen überhaupt, beobachten unter sich keine lexicographische Ordnung. Die lexicographische hat darinn einen Vorzug, daſs ihre Darstellung leichter ist, aber in Betracht der gröſsern Anwendung auf die Analysis verdient wohl die Klasseninvolution vorgezogen zu werden. Es läſst sich indessen die lexicographische sehr leicht in eine Klasseninvolution verwandeln.

aus dieſem Grunde nennt man ſie auch zum Unterſchied von der Klaſſeninvolution eine Lexicographiſche und bezeichnet ſie mit $\tilde{\mathfrak{J}}$ und ſo, wie man für die einzelnen Klaſſen eigene Zeichen hat, bedient man ſich hier für den Inbegriff der Complexionen der Ordnung a. b, c u. ſ. w. der Zeichen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, u. ſ. f. denen man ebenfalls oben zur Linken das Summenzeichen anhängt.

2. *Anmerkung.*

Wenn man die lexicographiſche Involution in arithmetiſcher Hinſicht betrachtet und ihre Zahlencomplexionen als Brüche irgend eines Zahlenſyſtems anſieht, ſo findet man, daſs dieſe wachſend fortlaufen. Denn geſetzt man ſieht die Zahlencomplexionen des vorhin gegebenen Beiſpiels als Brüche des decadiſchen Syſtems an, ſo erhält man, 0,111111: 0,111112: 0,11113; 0,11122; 0,1114; 0,1123; 0,115; 0,1222; 0,124; 0,133; 0,16; 0,223; 0,25; 0,34; 0,7. Dieſe Betrachtung giebt die merkwürdige Relation der lexicographiſchen Involution zur Klaſſeninvolution, daſs bei beiden die Complexionen als Zahlen wachſend fortgehn, daſs dieſe aber bei der Klaſſeninvolution, g a n z e Zahlen, hingegen bei der lexicographiſchen, B r ü c h e eines Zahlenſyſtems ſind.

3. *Anmerkung.*

Die lexicographiſche Involution läſst viele nützliche Umwandlungen ihrer Form zu, dieſe ſollen daher angegeben werden, wenn zuvor die beiden Gleichungen aufgeſtellt ſind, welche die Vergleichung der lexicographiſchen mit der Klaſſeninvolution und die Betrachtung der lexicographiſchen allein, ſogleich darbiethet.

1. *Zusatz.*

$$\text{Es ist } {}^{n}J_{\left({1,\,2,\,3,\,4\,\ldots \atop a,\,b,\,c,\,d\,\ldots}\right)} = {}^{n}\mathfrak{J}_{\left({1,\,2,\,3,\,4\,\ldots \atop a,\,b,\,c,\,d\,\ldots}\right)}$$

2. *Zusatz.*

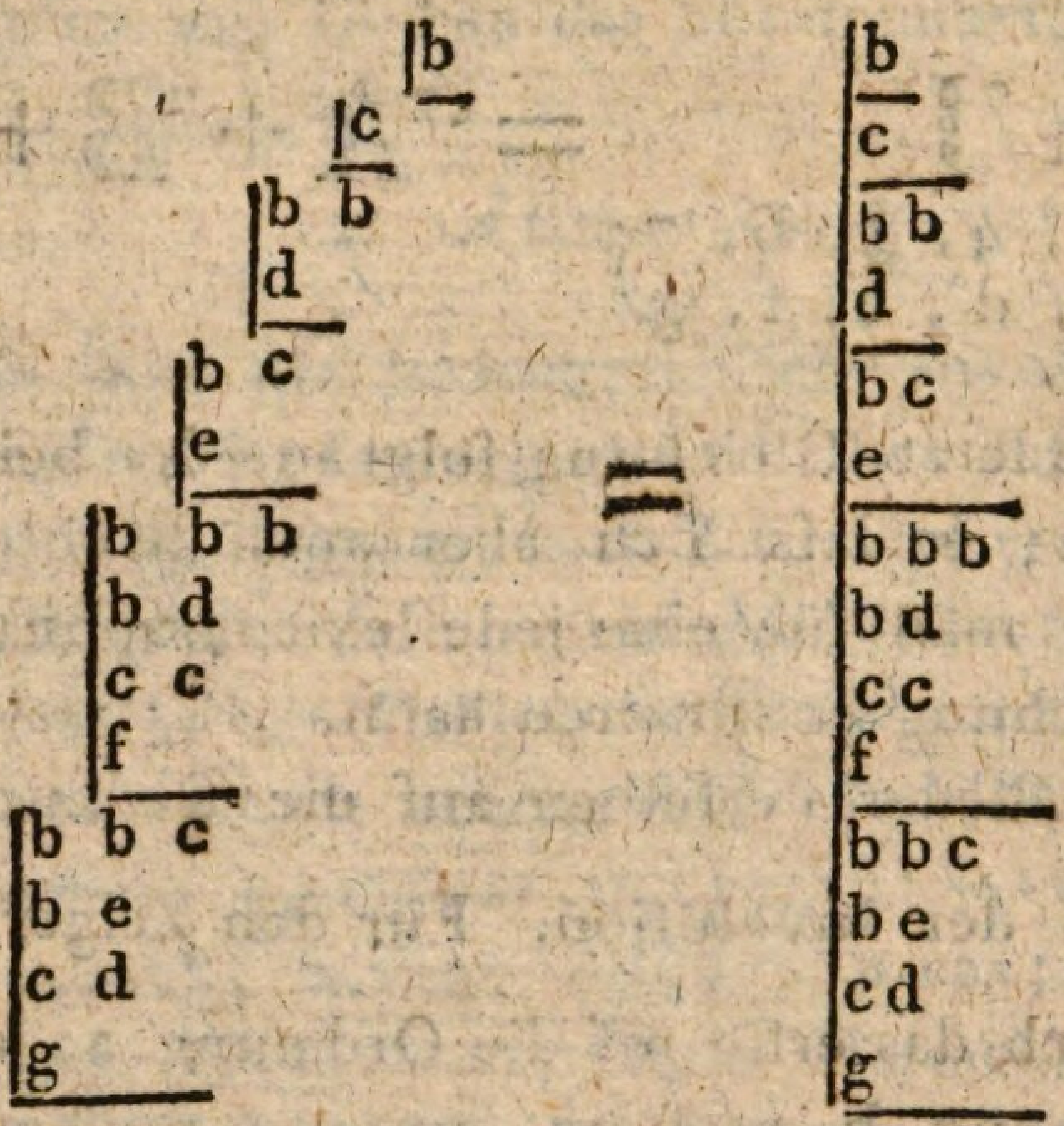
$$\text{Es ist } {}^{7}\mathfrak{J}_{\left({1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7 \atop a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f,\,g}\right)} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{G}.$$

Diese letzte Gleichung folgt aus den beiden gegebenen Beispielen; es läſst ſich aber auch leicht allgemein zeigen, wie man für eine jede lexicographiſche Involution eine Gleichung conſtruiren kann. Es beziehn ſich nämlich die Glieder derſelben auf die Ordnungen der Complexionen der Involution. Für den Zeiger $\left({1,\,2,\,3\,\ldots \atop a,\,b,\,c\,\ldots}\right)$ bezieht ſich das erſte auf die Ordnung a, das zweite auf die Ordnung b u. ſ. w. ununterbrochen fort bis zur Ordnung der vorletzten Complexion. Zwiſchen der Ordnung der vorletzten und letzten Complexion oder zwiſchen der vorletzten und letzten Ordnung entſteht aber eine Lücke, ausgenommen bei der Involution zur Summe 2. Um alſo die Glieder der Gleichung zu kennen, kömmt es nur darauf an, daſs man die vorletzte und letzte Ordnung zu beſtimmen weiſs. Dies geſchieht folgendermaſsen: Für die Summe *m* iſt *m* ſelbſt die letzte Complexion und folglich der damit correſpondirende Buchſtabe auch die letzte Ordnung. Die vorletzte Complexion iſt eine Binion und entweder iſt ihr erſtes Element als Zahl eben ſo groſs oder um 1 kleiner als das zweite Element. Läſst ſich alſo die Zahl *m* in zwei gleiche Theile zerlegen, ſo beſtimmt der mit dieſem Theile correſpondirende Buchſtabe auch die vorletzte Ordnung. Kann aber *m* nicht in zwei gleiche Theile zerfället werden, ſo zerlegt man ſie in zwei Theile,

wovon der eine um 1 kleiner als der andere ist und die Ordnung des kleinern ist alsdenn die vorletzte.

3. *Zusatz.*

Läſst man im ersten Beispiele das Element a weg so erhält man die Figur



In der zweiten Figur befindet sich zwischen jeden zwei Horizontalstrichen eine lexicogrophische Involution, denn z. B. zwischen dem fünften Paare jener Linien liegt eine solche Involution zur Summe 6 wie aus

b|b b
b|d
c c
f

deutlich erhellet.

Diese Involutionen beziehn sich auf den Zeiger $\left(\begin{matrix}2, & 3, & 4 & \ldots \\ b, & c, & d & \ldots\end{matrix}\right)$, sie sind aber keine vollständige, weil die Involution zur Summe n nicht auch die Complexionen zu allen vorhergehenden Summen enthält, denn z. E. in dem angeführten Beispiele, sind auſser den Complexionen zur Summe 6, nur noch die zur Summe 4 und 2 enthalten.

Die

Die Conſtruction dieſer Involutionen geſchieht unabhängig von einander folgendermaſsen:

1) Man ſetzt b oder c hin, nachdem die Summenzahl für welche man die Complexionen ſucht eine grade oder ungrade Zahl iſt.

2) Man ſchreibt dem hingeſetzten Elemente, b vor und ſetzt unter dieſe Complexion das Element, welches mit ihr einerlei Summenzahl hat.

3) Man ſetzt die Involution ſo weit als nöthig iſt, nach folgender allgemeinen Regel fort: Um aus den Complexionen zur Summe n—2 die zur Summe *n* zu erhalten, wird

α) allen gedachten Complexionen b vorgeſchrieben. Dies giebt die Complexionen der Ordnung b.

β) Unter dieſen Complexionen der Ordnung b, werden die aufgeſucht, welche weder zwei gleiche Anfangs- noch Endelemente haben und hierinn wird für das erſte Element, das ihm im Zeiger folgende und für das letzte das im Zeiger ihm vorhergehende ſubſtituirt. Iſt dies geſchehn, ſo hat man die Complexionen der Ordnung c.

γ) Auf dieſelbe Weiſe leitet man aus dieſen Complexionen der Ordnung c, wieder die der Ordnung d her u. ſ. f.

δ) Laſſen ſich auf ſolche Art weiter keine Complexionen bilden, ſo ſetzt man unter die zuletzt hingeſchriebene das einzelne Element welches mit ihr einerlei Summenzahl hat.

Beispiel.

$${}^{11}\mathfrak{z}\left(\begin{matrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{matrix}\right)$$

b b b b c
b b b e
b b c d
b b g
b c c c
b c f
b d e
b i
c c e
c d d
c h
d g
e f
l

4. *Zusatz.*

Es ist

a a a a a a a	a^6 a	a^6 a
a a a a a b	a^5 b	$a^5\,{}^{2}\mathfrak{z}$
a a a a c	a^4 c	$a^4\,{}^{3}\mathfrak{z}$
a a a b b	a^3 b b	$a^3\,{}^{4}\mathfrak{z}$
a a a d	a^3 d	
a a b c	a^2 b c	$a^2\,{}^{5}\mathfrak{z}$
a a e	a^2 e	
a b b b	a^1 b b b	$a^1\,{}^{6}\mathfrak{z}$
a b d	a^1 b d	
a c c	a^1 c c	
a f	a^1 f	
b b c	a^0 b b c	$a^0\,{}^{7}\mathfrak{z}$
b e	a^0 b e	
c d	a^0 c d	
g	a^0 g	$\left(\begin{matrix}2, & 3, & 4\ldots\\ b, & c, & d\ldots\end{matrix}\right)$

(The three columns are joined by "=".)

Dies giebt die Gleichung

$${}^{7}\mathfrak{z}\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{matrix}\right) = a^6 a + a^5\,{}^{2}\mathfrak{z} + a^4\,{}^{3}\mathfrak{z} + a^3\,{}^{4}\mathfrak{z} + a^2\,{}^{5}\mathfrak{z} + a^1\,{}^{6}\mathfrak{z} + a^0\,{}^{7}\mathfrak{z}\left(\begin{matrix}2, & 3, & 4, & \ldots\\ b, & c, & p, & \ldots\end{matrix}\right)$$

wor-

woraus für die Summe n diese folgt:

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3,\,4\,\cdot\,\cdot\\ a,\,b,\,c,\,d\,.\,.\end{smallmatrix}\right)}{{}^{n}\mathfrak{J}} = a^{n-1}a + a^{n-2}\,{}^{2}\mathfrak{J} + a^{n-3}\,{}^{3}\mathfrak{J} + a^{n-4}\,{}^{4}\mathfrak{J} + \cdot + a^{0}\,{}^{n}\mathfrak{J} \quad \left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4\,\cdot\,\cdot\,\cdot\\ b,\,c,\,d\,.\,.\,.\end{smallmatrix}\right)$$

Setzt man die Glieder dieser Gleichung unter einander und neben jedes seinen entwickelten Werth und zieht dann zwischen den Gliedern und ihren Werthen einen Vertikalstrich, so erhält man diese Figur:

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3,\,4\,\cdot\,\cdot\\ a,\,b,\,c,\,d\,.\,.\end{smallmatrix}\right)}{{}^{n}\mathfrak{J}}$$

$$\|$$

$a^{n-1}a =$	$a^{n-1}\ (a)$
$a^{n-2}\,{}^{2}\mathfrak{J} =$	$a^{n-2}\ (b)$
$a^{n-3}\,{}^{3}\mathfrak{J} =$	$a^{n-3}\ (c)$
$a^{n-4}\,{}^{4}\mathfrak{J} =$	$a^{n-4}\ (b^2, d)$
$a^{n-5}\,{}^{5}\mathfrak{J} =$	$a^{n-5}\ (bc, e)$
$a^{n-6}\,{}^{6}\mathfrak{J} =$	$a^{n-6}\ (b^3, bd, c^2, f)$
$a^{n-7}\,{}^{7}\mathfrak{J} =$	$a^{n-7}\ (b^2c, be, cd, g)$
$a^{n-8}\,{}^{8}\mathfrak{J} =$	$a^{n-8}\ (b^4, b^2d, bc^2, bf, ce, d^2, h)$
$a^{n-9}\,{}^{9}\mathfrak{J} =$	$a^{n-9}\ (b^3c, b^2e, bcd, bg, c^3, cf, de, i)$
$a^{n-10}\,{}^{10}\mathfrak{J} =$	$a^{n-10}\ (b^5, b^3d, b^2c^2, b^2f, bce, bd^2, bh, c^2d, cg, df, e^2, k)$
u. s. w.	u. s. w. u. s. w.
$\left(\begin{smallmatrix}2,\,3,\,4\,\cdot\,\cdot\\ b,\,c,\,d\,.\,.\end{smallmatrix}\right)$	

Das Geſetz nach welchem die Widerholungsexponenten der a fortgehn liegt hier deutlich vor Augen. Das Fortſchreitungs-Geſetz für die Complexions-Reihen, denen die a vorgeſetzt ſind, iſt dieſes:

Um die *m*te Reihe zu erhalten ſchreibt man 1) allen Complexionen der m—2ten Reihe b vor; hierauf ſubſtituirt man 2) in allen Complexionen der m—1ten Reihe, welche zwei ungleiche Anfangselemente haben, für das erſte das nächſtfolgende des Zeigers $\binom{2,\ 3,\ 4 \ldots}{b,\ c,\ d \ldots}$ und ſchreibt 3) die Complexionen welche 1 und 2 geben, in der Ordnung wie ſie gefunden werden neben einander.

Anmerkung.

Dieſe Darſtellung iſt die vollſtändigſte Involution, die ſich denken läſst, weil bei ihr der Fortgang zu dem Folgenden völlig offen ſteht und das Abſondern des Vorhergehenden von dem Folgenden durch ein Ziehn eines einzigen Horizontalſtrichs geſchieht. Denn will man z. B. $\overset{9}{\mathfrak{J}}$ haben, ſo braucht man nur unter $a^{n-9}\,\overset{9}{\mathfrak{J}}$ und den $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots}{a,\ b,\ c,\ d \ldots}$ dazugehörigen Werth einen Strich zu ziehn, was ſich dann über dieſem Striche befindet giebt die verlangte lexicographiſche Involution, ſo bald man darinn ſtatt *n* die Zahl 9 ſetzt.

5. *Zuſatz.*

Ordnet man in der Figur des vierten Zuſatzes, die Complexionen welche in Klammern eingeſchloſſen ſind ſo neben einander, daſs die einbuchſtabige die erſte iſt und dieſer, lexicographiſch, die zweibuchſtabigen, dann die dreibuchſtabigen Complexionen folgen u. ſ. w. und daſs hierbei die Complexionen der Involution überhaupt, zu-

zugleich ſo übereinander kommen, daſs ſich die *ein*buchſtabigen ſämmtlich durch einen Vertikalſtrich von den zweibuchſtabigen, dieſe wieder auf die nämliche Weiſe von den dreibuchſtabigen trennen laſſen u. ſ. w. ſo erhält man wenn dies letzte geſchieht, dieſe Figur:

$$^{n}J\left(\begin{matrix}1, 2, 3\ldots\\ a. b, c\ldots\end{matrix}\right)$$

a^{n-1}	a					1
a^{n-2}	b					2
a^{n-3}	c					3
a^{n-4}	d	b^2				4
a^{n-5}	e	bc				5
a^{n-6}	f	bd cc	b^3			6
a^{n-7}	g	be cd	b^2c			7
a^{n-8}	h	bf ce d^2	b^2d bc^2	b^4		8
a^{n-9}	i	bg cf de	b^2e bcd c^3	b^3c		9
a^{n-10}	k	bh cg df e^2	b^2f bce bd^2 c^2d	b^3d b^2c^2	b^5	10

Die Zahlen welche in der Figur neben dem Doppelſtriche ſtehn, zählen von oben nach unten die Horizontalcolumnen, ſo ſind z. B. f, bd, cc b^3 Complexionen der 6ten Columne.

Das Geſetz für die Conſtruction dieſer Figur, iſt dieſes:

1) Es werden a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, a^{n-4} u. ſ. w. in eine Vertikalreihe unter einander geſchrieben.

2) Hierneben ſetzt man die Unionen, a, b, c, d.., wie ſie im Zeiger folgen,

3) Sämmtlichen Unionen, a ausgenommen, ſetzt man b vor und ſchreibt dieſe Binionen ſo neben die Unionen, daſs die erſte um zwei Columnen tiefer ſteht als b.

4) Unter dieſen ſucht man, von der erſten an, die auf, welche ſich mit zwei verſchiedenen Elementen anfangen und verwandelt das erſte Element derſelben in das nächſtfolgende des Zeigers und ſchreibt die hierdurch entſtandenen Binionen ſo neben die der Ordnung b, daſs die erſte der Ordnung c um *eine* Columne tiefer ſteht als die der Ordnung b, aus der ſie abgeleitet iſt. Auf gleiche Weiſe leitet man aus den Binionen der Ordnung c die der Ordnung d, aus dieſen wieder die der Ordnung e her u. ſ. f, und ordnet die Complexionen der nächſtfolgenden Ordnung q jedesmal ſo neben die der nächſtvorhergehenden Ordnung p, daſs die erſte Complexion der Ordnung q um *eine* Columne tiefer kömmt als die der Ordnung p ſteht aus der man ſie gemacht hat.

5) Vor alle Binionen ſchreibt man b und ſetzt die hierdurch erhaltene erſte Ternion um 2 Columnen tiefer als die erſte Binion ſteht und zwar zugleich ſo, daſs ſie durch eine Vertikallinie von der letzten Binion getrennt werden kann; die Ternionen ſelbſt aber, ordnet man ſo neben einander, wie die Binionen geordnet ſind, aus welchen man ſie abgeleitet hat. Aus dieſen Ternionen der Ordnung b folgert man wieder die der Ordnung c, wie man bei den Binionen aus denen der Ordnung b die der Ordnung c folgert und ſchreibt die Ternionen die man hierdurch erhält, einzeln ſo neben die Ternionen der Ordnung b, daſs eine jede um eine Columne tiefer kömmt als die ſteht, aus welcher ſie gemacht iſt. Auf die nämliche Weiſe wie man die Ternionen der Ordnung c bekömmt, erhält man auch die der Ordnung d, aus dieſen wieder die der Ordnung e u. ſ. f. und beobachtet hierbei in Rückſicht auf das Nebeneinanderſchreiben die Vorſchrift nach

wel-

welcher die Ternionen der Ordnung c neben die der Ordnung b geschrieben werden.

6) Alle Operationen, welche 5) vorschreibt nimmt man wieder vor um die Quaternionen zu erhalten, hierauf wieder um die Quinionen zu bekommen u. s. w.

Anmerkung.

Die Figur des vierten Zusatzes giebt die lexicographische Involution für eine jede bestimmte Summe, die Figur dieses fünften Zusatzes hingegen, die Klasseninvolution jeder Summe. Um die Klassen für jede Summe z. B. für die Summe 7 zu erhalten, hat man hier folgende Operationen vorzunehmen:

1) Man substituirt für n die Zahl 7 und zieht unter a^0 und die daneben liegenden Complexionen einen Strich.

2) Um eine Klasse z. B. die dritte für diese Summe zu erhalten, steigt man von der Union der letzten Horizontalcolumne zu der Union herauf, welche sich in der Columne befindet, die von der letzten angerechnet, die dritte ist. Hierauf zieht man in Gedanken durch das Rechteck, worinn die Union liegt zu der man hinaufgestiegen ist, von oben nach unten und zwar von der Linken nach der Rechten eine Diagonallinie, eben so wieder durch das Rechteck in dessen einer Winkelspitze der Endpunkt der gezogenen Diagonallinie liegt u. s. w. wie es in der Figur angegeben ist.

3) Die Complexionen welche sich in diesen Rechtcken befinden, nämlich e, bd, cc, bbc schreibt man verbunden mit den ihnen zukommenden a unter einander, wie hier folgt: aae.

aae
abd
acc
bbc

Ist dies geschehn so hat man die verlangte Klasse.

6. *Zusatz.*

Läst man in der Figur des fünften Zusatzes die Ausdrücke weg, welche a enthalten, und betrachtet

dann ihre Complexionen in Rückſicht auf den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4..}{b,\ c,\ d,\ e..}$, ſo ergiebt ſich:

1) daſs die Unionen die erſten Klaſſen zu den Summen 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. ausmachen.

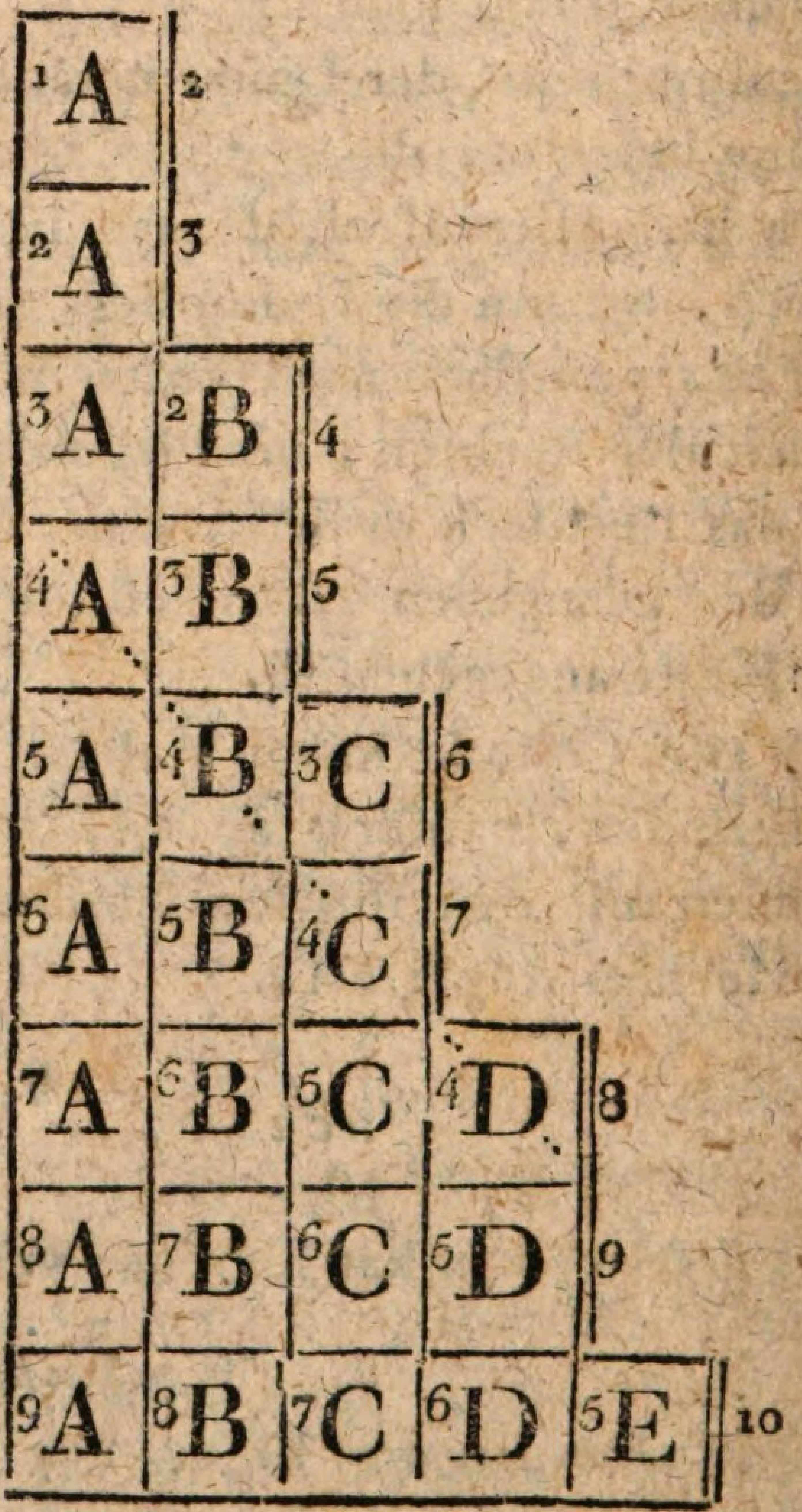
2) Daſs die neben dieſen Unionen zunächſtliegenden Rechtecke, von dem oberſten an, die zweiten Klaſſen zu den Summen 2, 3, 4 u. ſ. f. beſitzen.

3) Daſs neben dieſen zweiten Klaſſen ſich wieder die dritten Klaſſen zur Summe 3 und den folgenden Summen befinden.

u. ſ. w.

Hiernach kann man die gedachte Figur, wenn man die a wegläſst einfacher ſo ausdrücken.

$\binom{1,\ 2,\ 3\ ..}{b,\ c,\ d\ ..}$



Anmerkung.

Gleich der erste Blick auf die Figur lehrt, daſs man in Stande ist durch sie auf eine leichte Weise alle Klassen zu jeder bestimmten Summe zu finden; denn z. B. um alle Klassen zur Summe 4 zu erhalten, braucht man nur die Klassen zu nehmen, welche in der Diagonallinie liegen, die in der Figur angegeben ist. Die Figur des fünften Zusatzes giebt also nicht nur für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ sondern auch für $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$ alle Klassen zu einer jeden beliebigen Summe. Es ist aber ein groſser Unterschied, wie sie die Klassen für die beiden angegebenen Zeiger enthält. Für $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ befinden sich die einzelnen Complexionen, die in Verbindung mit den ihnen zukommenden a eine einzige Klasse ausmachen im mehrern verschiedenen Rechtecken, hingegen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$ ist in einem jeden Rechtecke jedesmal eine ganze Klasse enthalten.

7. *Zusatz.*

Die Vergleichung der Figuren des 5ten und 6ten Zusatzes giebt diese Gleichung:

$$
{}^{n}J = a^{n-1}a + a^{n-2}\,{}^{1}A + a^{n-3}\,{}^{2}A + a^{n-4}\left\{\begin{matrix} {}^{3}A + \\ + {}^{2}B \end{matrix}\right. \binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}
$$

$$
a^{n-5}\left\{\begin{matrix} {}^{4}A + \\ + {}^{3}B \end{matrix}\right. a^{n-6}\left\{\begin{matrix} {}^{5}A + \\ + {}^{4}B \\ + {}^{3}C \end{matrix}\right. a^{n-7}\left\{\begin{matrix} {}^{6}A + \\ + {}^{5}B \\ + {}^{4}C \end{matrix}\right. a^{n-8}\left\{\begin{matrix} {}^{7}A + \\ + {}^{6}B \\ + {}^{5}C \\ + {}^{4}D \end{matrix}\right.
$$

$$
a^{n-9}\left\{\begin{matrix} {}^{8}A + \ldots \\ + {}^{7}B \\ + {}^{6}C \\ + {}^{5}D \end{matrix}\right.
$$

$$
\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots\ldots}
$$

 Dar-

Darstellung einzelner Klassen der Combinationen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

§. 30.

Aufgabe.

Es wird die *m*te Klasse zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ldots}$ verlangt.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe m—1 Einheiten neben einander und setze das Supplement zur Summe *n*, als letztes Element der Complexion rechts daneben, welches also hier gleich $n-(m-1) = n+1-m$ ist, so hat man die erste Complexion der ${}^{n}\mathfrak{M}$.

2) Aus dieser leite man die zweite; aus der zweiten die dritte; aus der dritten die vierte Complexion u. s. w. nach der Regel ab, welche der 17te Satz des §. 2. überhaupt giebt um aus einer gutgeordneten Zahl die nächstgröſsere zu der nämlichen Ziffernsumme zu erhalten. Die *m*zifrige Zahl, auf welche man hierbei kömmt, aus der nach der genannten Regel keine gröſsere *m*zifrige Zahl hergeleitet werden kann, ist die letzte Complexion der Klasse.

Substituirt man in den erhaltenen Zahlencomplexionen für die Zifern, die damit correspondirenden Buchstaben, so erhält man die gesuchten Buchstabencomplexionen.

Beweis.

Man geht hier von der kleinsten mzifrigen gutgeordneten Zahl der Zifernsumme *n* zu allen gröſsern der nämlichen Summe fort, folglich kann keine Zahlencomplexion übergangen werden, und daher giebt auch die angegebene Substitution der Buchstaben für die Zahlen, alle Buchstabencomplexionen.

Bei-

Beiſpiele.

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots \\ a, b, c, d, e, f, g \ldots \end{pmatrix}$$

^{10}D	aaag	1117	^{10}D
	aabf	1126	
	aace	1135	
	aadd	1144	
	abbe	1225	
	abcd	1234	
	accc	1333	
	bbbd	2224	
	bbcc	2233	

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man durchlaufe in dem Zeiger, von der Zahl *n* an, von der Rechten nach der Linken, *m* Elemente und ſetze das *m*te Element worauf man hierbei kömmt als Union hin.

2) Dieſer Union ſchreibe man das erſte Element des Zeigers vor, ſo hat man eine Binion. Aus dieſer Binion mache man eine zweite, indem man für ihr erſtes Element das nächſtfolgende und für ihr letztes das nächſtvorhergehende des Zeigers ſetzt. Auf die nämliche Weiſe leite man hieraus eine dritte, aus der dritten eine vierte u. ſ. w. her und ſetze dieſes ſo lange fort bis man eine Binion bekommen hat deren beide Elemente entweder unter ſich gleich oder für den gegebenen Zeiger zwei zunächſt auf einander folgende ſind.

3) Man ſetze vor alle gefundene Binionen das erſte Element des Zeigers, ſo erhält man Binionen der Ordnung dieſes Elements. Unter dieſen ſuche man die auf, welche ſowohl zwei verſchiedene Anfangs- als Endelemente haben und ſetze für dieſer ihr erſtes Element das nächſtfolgende des Zeigers und für ihr letztes das im Zeiger nächſtvorhergehende. Hierdurch bekömmt man Ternio-

nen

nen der Ordnung b. Auf die nämliche Weise leite man hieraus wieder, Ternionen der Ordnung c; aus diesen aufs neue Ternionen der Ordnung d her u. s. w. und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort, bis man auf Complexionen einer Ordnung gekommen ist, unter welchen sich keine befindet, die sowohl zwei verschiedene Anfangs- als Endelemente hat.

4) Eben so wie man aus den Binionen die Ternionen ableitet, leite man aus diesen wieder, Quaternionen, aus den Quaternionen, Quinionen her u. s. w. bis man auf diese Weise durch die M—1tionen zu den Mtionen gekommen ist. Diese machen alsdenn die verlangte Klasse aus.

Beweis.

Aus den gegebenen Regeln erhellet hinreichend, daſs man durch sie nur gutgeordnete Complexionen bekömmt. Diese Complexionen haben auch die verlangte Summe; denn die Union, welche man hinschreibt ist die Zahl n—(m—1) selbst, oder correspondirt doch mit dieser. Die Binionen sind aus diesem Grunde Complexionen zur Summe n—(m—2); die Ternionen haben die Summe n—(m—3), u. s. f. die Mtionen die Summe n—(m—m), also die gegebene Summe n. Es kann aber auch keine Mtion fehlen, denn nähme man an, daſs irgend eine z. B. von der Ordnung d fehlte, so müſste man auch die von der Ordnung c nicht haben, welche entsteht, wenn man in der fehlenden von der Ordnung d, das erste Element d in das nächstvorhergehende und das letzte in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Auf gleiche Weise setzt dieser Mangel wieder den einer Mtion der Ordnung b und dieser wieder das Fehlen einer Complexion der Ordnung a voraus. Hätte man aber eine Mtion der Ordnung a nicht, so müſste auch wieder die M—1tion zur Summe n—1 übergangen seyn, welche man aus der fehlenden der Ordnung a dadurch bekömmt, daſs man das erste Element ganz wegläſst.

Hier-

Hieraus würde aber wieder eben so der Mangel einer M—2tion zur Summe n—2 folgen, wie aus dem Mangel einer Mtion das Fehlen einer M—1tion folgte und auf gleiche Weise würde wieder das Auslassen der gedachten M—2tion voraussetzen, daſs auch eine M—3tion zur Summe n—3 u. s. w. eine Binion zur Summe n—(m—2) und zuletzt eine Union zur Summe n—(m—1) fehlte. Dies letzte ist aber nicht möglich, weil die genannte Union zuerst hingeschrieben wird.

Beispiele.

$\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots \\ a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, \ldots\end{matrix}\right)$

^{13}E	a	a	a	a	i	1	1	1	1	9	^{13}E
	a	a	a	b	h	1	1	1	2	8	
	a	a	a	c	g	1	1	1	3	7	
	a	a	a	d	f	1	1	1	4	6	
	a	a	a	e	e	1	1	1	5	5	
	a	a	b	b	g	1	1	2	2	7	
	a	a	b	c	f	1	1	2	3	6	
	a	a	b	d	e	1	1	2	4	5	
	a	a	c	c	e	1	1	3	3	5	
	a	a	c	d	d	1	1	3	4	4	
	a	b	b	b	f	1	2	2	2	6	
	a	b	b	c	e	1	2	2	3	5	
	a	b	b	d	d	1	2	2	4	4	
	a	b	c	c	d	1	2	3	3	4	
	a	c	c	c	c	1	3	3	3	3	
	b	b	b	b	e	2	2	2	2	5	
	b	b	b	c	d	2	2	2	3	4	
	b	b	c	c	c	2	2	3	3	3	

Anmerkung.

Das Verfahren der zweiten Auflösung ist völlig involutorisch, daher auch ihre Darstellungen Involutionen sind, wie aus den eben gegebenen Beispielen deutlich erhellet.

1. *Zusatz.*

Es ist

$$
\underset{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}{{}^{13}E} =
\begin{array}{l}
a\,a\,a\,a\,i \\ \hline
a\,a\,a\,b\,h \\
a\,a\,a\,c\,g \\
a\,a\,a\,d\,f \\
a\,a\,a\,e\,e \\ \hline
a\,a\,b\,b\,g \\
a\,a\,b\,c\,f \\
a\,a\,b\,d\,e \\
a\,a\,c\,c\,e \\
a\,a\,c\,d\,d \\ \hline
a\,b\,b\,b\,f \\
a\,b\,b\,c\,e \\
a\,b\,b\,d\,d \\
a\,b\,c\,c\,d \\
a\,c\,c\,c\,c \\ \hline
b\,b\,b\,b\,e \\
b\,b\,b\,c\,d \\
b\,b\,c\,c\,c
\end{array}
=
\begin{array}{r|l}
a^4 & i \\ \hline
 & b\,h \\
a^3 & c\,g \\
 & d\,f \\
 & e\,e \\ \hline
 & b\,b\,g \\
 & b\,c\,f \\
a^2 & b\,d\,e \\
 & c\,c\,e \\
 & c\,d\,d \\ \hline
 & b\,b\,b\,f \\
 & b\,b\,c\,e \\
a^1 & b\,b\,d\,d \\
 & b\,c\,c\,d \\
 & c\,c\,c\,c \\ \hline
 & b\,b\,b\,b\,e \\
a^0 & b\,b\,b\,c\,d \\
 & b\,b\,c\,c\,c
\end{array}
=
\begin{array}{r|l}
a^4 & {}^{9}A \\ \hline
a^3 & {}^{10}B \\ \hline
a^4 & {}^{11}C \\ \hline
a^1 & {}^{12}D \\ \hline
a^0 & \underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{{}^{13}E}
\end{array}
$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$
\underset{\binom{1,\,2,\,3,\,4,\,..}{a,\,b.\,c,\,d\,..}}{{}^{13}E} = a^4\,{}^{9}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{11}C + a^1\,{}^{12}D + a^0\,\underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{{}^{13}E},
$$

welche allgemein für die Summe $r+n$ ausgedrückt diese Form hat:

$$
\underset{\binom{1,\,2,\,3,\,4\,..}{a,\,b,\,c,\,d\,..}}{{}^{r+n}\mathfrak{N}} = a^{n-1}\,{}^{r+1}A + a^{n-2}\,{}^{1+2}B + a^{n-3}\,{}^{+3}C + ..
\underset{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}}{} \qquad + a^{n-m}\,{}^{+m}\mathfrak{M} + ..
$$

2. Zusatz.

Die Klassen

$$\underset{\binom{2,\;3,\;4,\;5\,\ldots}{b,\;c,\;d,\;e\,\ldots}}{{}^{r+1}A,\;{}^{r+2}B,\;{}^{r+3}C,\;{}^{r+4}D}\quad\text{u. s. f.}$$

findet man, wenn

$$\underset{\binom{1,\;2,\;3\,\ldots}{b,\;c,\;d\,\ldots}}{{}^{r}A,\;{}^{r}B,\;{}^{r}C,\;{}^{r}D}\quad\text{u. s. w. nach}$$

einer der beiden ersten Auflösungen des §. 29. aufgesucht werden. Denn wenn man die Klassen zur Summe r für den Zeiger $\binom{1,2,3\,\ldots}{b,c,d\,\ldots}$ als Klassen für den Zeiger $\binom{2,3,4\,\ldots}{b,c,d\,\ldots}$ ansieht, so giebt man dadurch jedem Elemente der Species jener Klassen einen um 1 höhern Werth; also aus der Union zur Summe r wird eine Union zur Summe r+1; aus den Binionen zur Summe r, werden Binionen zur Sur Summe r+2; aus den Ternionen zur Summe r, werden Ternionen zur Summe r+3 u. s. f. so dafs also

$$\underset{\binom{1,\;2,\;3\,\ldots}{b,\;c,\;d\,\ldots}}{{}^{r}A,\;{}^{r}B,\;{}^{r}C,\;{}^{r}D}\quad\text{und}\quad\underset{\binom{2,\;3,\;4\,\ldots}{b,\;c,\;d\,\ldots}}{{}^{r+1}A,\;{}^{r+2}B,\;{}^{r+3}C,\;{}^{r+4}D}$$

in Rücksicht auf ihre Buchstabencomplexionen völlig mit einander übereinstimmen.

Es kann daher auch der letzten Gleichung des ersten Zusatzes diese Form gegeben werden:

$$\underset{\binom{1,\;2,\;3,\;4\,\ldots}{a,\;b,\;c,\;d\,\ldots}}{{}^{r+n}\mathfrak{N}} = a^{n-1}\,{}^{r}A + \underset{\binom{1,\;2,\;3,\;4\,\ldots}{b,\;c,\;d,\;e\,\ldots}}{a^{n-2}\,{}^{r}B + a^{n-3}\,{}^{r}C} + \ldots$$

$$+ a^{n-m}\,{}^{r}\mathfrak{M} + \ldots,$$

wobei zu bemerken ist, dafs man die Glieder so weit fortsetzen mufs, bis $m = n$ oder $= r$ wird, d. h. so lange bis man auf $a^{0}\,{}^{r}\mathfrak{N}$ oder zu $a^{n-r}\,{}^{r}\mathfrak{R}$ kömmt, nachdem $r > n$ oder $< n$ ist. Z. B.

${}^{15}E$

$$^{15}E = a^4\,{}^{10}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{10}C + a^1\,{}^{10}D + a^0\,{}^{10}E$$
$$\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots} \qquad \binom{1,2,3,4\ldots}{b,c,d.e\ldots}$$
$$^{8}E = a^4\,{}^{3}A + a^3\,{}^{3}B + a^2\,{}^{3}C$$

3. *Zusatz.*

Die Gleichung des zweiten Zusatzes für $^{r+n}\mathfrak{N}$ giebt die merkwürdige Relation zwischen der *n*ten Klasse zur Summe r+n für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ und der Klasseninvolution zur Summe r für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}{b,\ c,\ d,\ d,\ldots}$, daſs die Klasseninvolution, durch ein bloſses Vorſetzen der a, in die *n*te Klaſſe und daſs die *n*te Klaſſe, durch ein Trennen der a, in die Klaſſeninvolution verwandelt werden kann. Beides fällt auch ſogleich bei der Betrachtung der mittlern Figur des 1ten Zuſatzes in die Augen; wenn man die ganze Figur auf den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ldots}$ und die Klaſſen, welche durch einen Strich von den a getrennt ſind, auf den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots}$ bezieht.

4. *Zusatz.*

Daſs man einer jeden einzelnen Klaſſeninvolution zur Summe r, eine Complexion von a ſo vorſetzen ſoll, wie es die Gleichung des zweiten Zuſatzes beſtimmt, kann man dadurch anzeigen, daſs man dem Zeichen $^{r}\mathfrak{J}$ ein a mit dem Wiederholungsexponenten n—* vorſchreibt, wo * alsdenn mit dem Klaſſenexponenten (§. 12, 8. Erkl.) übereinſtimmt. Hiernach läſst ſich alſo die Gleichung des 2ten Zuſatzes auch ſo ausdrücken:

$$ {}^{r+n}\mathfrak{N}_{\binom{1,\,2,\,3,\,4\ldots,}{a,\,b,\,c,\,d\ldots}} = a^{n-*}\;{}^{r}J_{\binom{1,\,2,\,3,\,4\ldots}{b,\,c,\,d,\,e\ldots}} \quad a). $$

§. 31.

Anmerkung.

Bei der Aufgabe des §. 30. ist der Zeiger so angenommen, daſs es für ſie keine Complexionen geben kann, die deswegen unnütze ſind, weil in ihnen höhere Elemente vorkommen, als der Zeiger enthält. Es iſt aber einleuchtend, daſs ſich der Zeiger ſo begrenzen läſst, daſs für eine Klaſſe zu einer gewiſſen Summe in der genannten Hinſicht unnütze Complexionen ſtatt finden können. Denn ſo giebt es z. B. für ${}^{15}E_{\binom{1,\,2,\,3,\,4}{a,\,b,\,c,\,d}}$ funfzehn dergleichen Complexionen und es laſſen ſich leicht Fälle angeben, in welchen noch mehrere vorkommen. Die Auflöſung, welche für die Aufgabe des §. 30. gegeben iſt, nimmt hierauf nicht Rückſicht, ſie befriedigt alſo nicht, wenn der Zeiger unnütze Complexionen zuläſst und dieſe doch übergangen werden ſollen. Es muſs alſo noch die Aufgabe aufgelöſet werden, die *m*te Combinationsklaſſe zur Summe *n* für einen Zeiger zu finden, für den es ſolche unnütze Complexionen giebt. Ihre Auflöſung iſt leicht, ſobald man weiſs wie die erſte Complexion dieſer *m*ten Klaſſe zur Summe *n* d. h. wie die gefunden wird, welche als Zahl betrachtet die kleinſte unter allen Complexionen dieſer Klaſſe iſt; aus dieſem Grunde

a) Diſquiſitiones Analyticae, auctore I. F. Pfaff. pag. 278. Ich habe dieſe Schrift ſchon pag. 31 genannt, ich darf nicht unterlaſſen auf die trefliche combinatoriſch-analytiſche Abhandlung überhaupt aufmerkſam zu machen, welche ihr zweites Kapitel über die Umkehrung der Reihen ausmacht.

Grunde ist ihr die Aufgabe des folgenden Paragraphs vorangeschickt und sie selbst erst in §. 33. aufgestellt. Um die beiden Aufgaben unter der Form, wie sie am genannten Orte gegeben sind, verstehn zu können, hat man dieses zu bemerken.

Wenn die *m*te Klasse zur Summe *n* nach einer der Auflösungen in §. 30. entwickelt wird, so besteht die erste Complexion derselben aus m—1 Einsen und ausserdem noch aus einem rechts daneben geschriebenen Elemente, dessen Zeigerzahl das Supplement von m—1 zu *n* ist. Ist also im Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$, ϱ wenigstens gleich diesem Supplemente, folglich wenigstens gleich $n - (m-1) = n - m + 1$, so kann auch ${}^{n}\mathfrak{M}$ durch eine der gedachten Auflösungen $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$ gefunden werden, nicht aber wenn $\varrho < n - m + 1$ ist. In dem Falle aber, dass $\varrho < n - m + 1$ ist, muss doch $m\varrho$ wenigstens gleich *n* seyn; denn wenn das höchste Element ϱ, *m* mal gedacht noch nicht *n* gäbe, so wäre auch für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$ keine *m*te Klasse zur Summe *n* möglich.

§. 32.

Aufgabe. a)

Es soll die erste Complexion der *m*ten Klasse zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \varrho}{a,\ b,\ c \ldots r}$ gefunden werden, in welchem zwar $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ ist.

Arith-

a) Von dieser Aufgabe wird sich schwerlich eine rein combinatorische Auflösung geben lassen, weil ihre Bedingungen sie mehr zu einer arithmetischen als combinatorischen Aufgabe machen.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man dividire $\varrho m-n$ durch $\varrho-1$ und wenn dies nicht möglich ist, weil $\varrho m-n > \varrho-1$, so dividire man durch $\varrho-2$ und geht auch dies nicht an so nehme man $\varrho-3$ zum Divisor u. s. w. und wenn eine solche Division die ganze Zahl π ohne Rest giebt, so schreibe man, nachdem der Divisor $\varrho-1$, $\varrho-2$, $\varrho-3$ u. s. f. $\varrho-\mu$ war, π Einsen, π Zweien, π Dreien u. s. w. π μen neben einander und lasse auf diese noch rechts hin so viele ϱ folgen, bis man eine Complexion der mten Klasse hat.

2) Sollte eine der angegebenen Divisionen die ganze Zahl π geben aber noch einen Rest lassen, so muss man neben die zuerst hingeschriebenen μen noch eine 2, 3, 4. u. s. f. ν setzen, nachdem der Rest gleich $\varrho-2$, oder gleich $\varrho-3$ u. s. f. gleich $\varrho-\nu$ ist und erst neben diese hingesetzte Zifer so oft ϱ schreiben als nöthig ist um eine Mtion zu erhalten.

Beweis.

Schreibt man m ϱen neben einander, so hat man eine Complexion der mten Klasse. Die Summe der Elemente dieser Complexion ist gleich dem Produkte ϱm; ist also ϱm grösser als n, so muss man die Summe ihrer Elemente um so viel kleiner machen als der Überschuss $\varrho m-n$ beträgt. Diese Verringerung der Summe geschieht aber, wenn man die einzelnen Elemente der Complexion kleiner macht und da sie als Zahl betrachtet die kleinste gutgeordnete zur Summe n seyn muss die für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \ldots \varrho \\ a, & b, & c \ldots r\end{matrix}\right)$ statt findet, so erhellet zugleich, dass man mit der Verkleinerung ihrer Elemente bei dem ersten zur Linken anfangen und diese so vornehmen muss, dass man ein jedes Element um so viel verkleinert als möglich ist. Man muss also untersuchen ob nicht

 die

die Complexion ſich mit Einſen, oder wenn dies nicht angeht mit Zweien anfangen kann u. ſ. w. und wie viele Elemente ſolche Einſen, Zweien u. ſ. f, ſeyn können.

1) Die gröſste Zahl um welche man die einzelnen Elemente der gedachten Complexion verkleinern darf iſt $\varrho-1$, die nächſtkleinere iſt $\varrho-2$, hierauf $\varrho-3$ u. ſ. w. weil $\varrho-(\varrho-1)=1$, $\varrho-(\varrho-2)=2$, $\varrho-(\varrho-3)=3$ iſt u. ſ. w. und dem Zeiger gemäſs, das geringſte Element, womit ſich die Complexion anfangen kann, 1 iſt. Iſt der Überſchuſs $\varrho m-n$ gröſser als $\varrho-1$, ſo kann auch von den erſten einzelnen Elementen, $\varrho-1$ ſubtrahirt werden; iſt $\varrho m-n > \varrho-1$ aber $< \varrho-2$, ſo läſst ſich nicht $\varrho-1$ aber $\varrho-2$ ſubtrahiren. Sollte $\varrho m-n$ kleiner als $\varrho-1$ auch wie $\varrho-2$ aber gröſser als $\varrho-3$ ſeyn, ſo fände die Subtraction der $\varrho-1$ und $\varrho-2$ nicht ſtatt aber die der $\varrho-3$ u. ſ. f. Geſetzt nun es wäre die gröſste Zahl um welche die einzelnen Elemente verkleinert werden könnten gleich $\varrho-\mu$ und man wollte wiſſen von wie vielen Elementen dieſe Zahl abgezogen werden, alſo wie viele Elemente gleich $\varrho-(\varrho-\mu)=\mu$ ſeyn dürften, ſo würde man dies offenbar erfahren, wenn man unterſuchte, wie oft der Überſchuſs $\varrho m-n$ die Zahl $\varrho-\mu$ in ſich begriffe, alſo wie groſs der Quotient $\frac{\varrho m-n}{\varrho-\mu}$ wäre. Giebt alſo $\varrho m-n$ durch $\varrho-\mu$ dividirt die ganze Zahl π, ſo muſs auch die geſuchte Complexion ſich mit π μen anfangen und die übrigen Elemente können nur ϱen ſeyn. (*Auflöſung* 1))

2) Gäbe die Diviſion des $\varrho m-n$ durch $\varrho-\mu$ die ganze Zahl π und lieſse einen gewiſsen Reſt, der alſo höchſtens $\varrho-2$ ſeyn könnte, ſo erhielte man dadurch noch nicht die verlangte Complexion zur Summe n, daſs man π mal, μ hinſchriebe und daneben noch $m-\pi$ mal das Element ϱ ſetzte, weil die Summe der hierdurch erhaltenen Complexion gewiſs um gedachten Reſt gröſser als n wäre, es müſste daher dieſer von dem erſten ϱ, neben

dem

dem letzten μ, noch subtrahirt werden. Ist also der Rest gleich $\varrho-\nu$, so muss neben der letzten μ noch $\varrho-(\varrho-\nu)=\nu$ stehn, und folglich bekömmt man hier die verlangte gutgeordnete Complexion, wenn man π μen neben einander schreibt, neben diese noch das Element ν setzt und hierauf so viele ϱen folgen läßt, bis man eine Complexion von m Elementen hat. (*Auflösung*, 2.).

Beispiele.

1) Es wird für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f}$ die erste oder als Zahl die kleinste Complexion von ${}^{28}H$ verlangt.

Hier ist $m=8$, $\varrho=6$, $n=28$, also $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=4$; folglich ist die gesuchte Complexion gleich $11116666=$ aaaaffff.

2) Es soll für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f}$ die erste Complexion der ${}^{40}H$ angegeben werden.

Hier ist $m=8$, $\varrho=6$, $n=40$, also $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=1\frac{3}{5}$. Der Rest 3 ist größer als $\varrho-2$ aber gleich $\varrho-3$, folglich ist die verlangte Complexion gleich $13666666=$ acffffff.

3) Man verlangt die erste Complexion der 11ten Klasse zur Summe 30 für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$.

Hier ist $m=11$, $\varrho=5$, $n=30$, also $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=6\frac{1}{4}$. Der Rest 1 ist kleiner als $\varrho-1$, $\varrho-2$, und $\varrho-3$ aber gleich $\varrho-4$, daher ist die zu bestimmende Complexion gleich $11111145555=$ aaaaaadeeee.

§. 33.

Aufgabe.

Es ſoll ${}^{n}\mathfrak{M}\binom{1,\ 2,\ 3 \ldots \rho}{a,\ b,\ c \ldots \nu}$ dargeſtellt werden, wobei angenommen wird, daſs $\rho < n - m + 1$, aber $\rho m > n$ iſt.

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

Man ſuche nach §. 32. die erſte Complexion, betrachte dieſe als eine Zahl und leite aus ihr ſucceſſiv nach des §. 6. 17ten Satze und deſſen Anmerkung unter der Bedingung alle gröſsern Zahlen her, daſs ρ die höchſte Zifer derſelben ſeyn ſoll. Um die Buchſtabencomplexionen zu erhalten ſubſtituire man für die Elemente der gefundenen Zahlencomplexionen die mit ihnen correſpondirenden Buchſtaben.

Beweis.

Man geht hier von der kleinſten gutgeordneten Zahl zur Summe n aus, die für die Zifern 1, 2, 3, . . . ρ möglich iſt und folgert aus dieſer die gröſsern gutgeordneten Zahlen nach einer Regel, welche nicht zuläſst, daſs eine übergangen wird, die für die gegebenen Bedingungen der Aufgabe ſtatt findet, folglich erhält man auch durch die Auflöſung alle verlangte Zahlencomplexionen und daher muſs die vorgeſchriebene Subſtitution der Buchſtaben auch alle Buchſtabencomplexionen geben.

Bei-

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g}$

	11147	aaadg	
	11156	aaaef	
	11237	aabcg	
	11246	aabdf	
	11255	aabee	
	11336	aaccf	
	11345	aacde	
	11444	aaddd	
^{14}E	12227	abbbg	^{14}E
	12236	abbcf	
	12245	abbde	
	12335	abcce	
	12344	abcdd	
	13334	acccd	
	22226	bbbb	
	22235	bbbc	
	22244	bbbdd	
	22334	bbccd	
	23333	bcccc	

§. 34.

Anmerkung.

Die Anzahl der Complexionen der Combinationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen, sowohl für einzelne als alle Klassen insgesammt zu berechnen, lehrt die der Combinationslehre angehängte zweite Tabelle. *a*).

a) Diese ist aus Hindenburgs Schrift genommen: Infinitinomii Dignitatum Exponentis indeterminati Historia, Leges ac Formulae pag. 170. Sie ist ein Theil der grössern Eulerschen Tafel: Nov. comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. III. pag. 165—169.

Mit der Berechnung der Anzahl der Combinationen zu bestimmten Summen beschäftigt sich Euler in dem 16ten Kapitel des ersten Theils seiner Introd. ad Analysin Infinit und noch ausführlicher in der vorhin genannten Schrift Ac. Sc. Petrop. T. III. pag. 125 et seq.

δ. Von den Combinationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen.

§. 35.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \, . \, . & \nu \\ a, & b, & c, & d \, . \, . & n \end{pmatrix}$ alle Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe ν verlangt.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze ν hin, so hat man $\overset{\nu}{\mathrm{A}}$'.

2) Wenn ν nicht das zweite Element des Zeigers ist, (a) so schreibe man vor das Element, welches im Zeiger dem ν zunächst vorhergeht das erste Element des Zeigers, so erhält man die erste Complexion der zweiten Klasse. Aus dieser leite man die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion u. s. f. der nämlichen Klasse her, indem man jedesmal das erste Element der zuletzt gefundenen Complexion in das nächstfolgende und ihr letztes Element in das nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt, bis man auf eine Binion kömmt, deren zweites Element im Zeiger zunächst auf ihr erstes Element folgt, oder zwischen deren beiden Elementen sich im Zeiger nur ein Element befindet,

3) Aus der zweiten Klasse leite man die dritte, aus der dritten die vierte ab u. s. f. nach folgenden allgemeinen Regeln:

α) Es

(a) Wenn ν das zweite Element des Zeigers ist, sich also auf 2 bezieht, so findet hier ausser der ersten weiter keine Klasse statt.

α) Es wird allen Complexionen der nächst vorhergehenden Klasse, die nicht das erste Element des Zeigers zum Anfangselemente haben und die sich mit zwei Elementen endigen, zwischen welchen im Zeiger wenigstens noch ein Element liegt, das erste Element des Zeigers vorgesetzt und ihr letztes Element in das ihm nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt. Dies giebt Complexionen der Ordnung des ersten Elements des Zeigers.

β) Unter den hierdurch gefundenen Complexionen werden die aufgesucht, welche sich mit zwei Elementen anfangen und endigen, zwischen denen sich im Zeiger wenigstens ein Element befindet und in diesen wird für das erste Element das nächstfolgende und für das letzte das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt. Dies giebt Complexionen der Ordnung des zweiten Elements des Zeigers.

γ) Nach der nämlichen Vorschrift, nach welcher man aus den Complexionen der Ordnung des ersten Elements die der Ordnung des zweiten Elements gefolgert hat, leite man aus denen der Ordnung des zweiten Elements des Zeigers wieder die der Ordnung des dritten Elements und aus diesen wieder die der Ordnung des vierten Elements her u. s. w. bis man auf Complexionen einer gewissen Ordnung kömmt auf welche diese Vorschrift nicht mehr angewandt werden kann. Diese Complexionen sind dann die letzten der gesuchten Klasse.

Beweis.

Die Auflösung kann nur gutgeordnete Complexionen zur Summe ν geben, dies erhellet aus ihrem vorgeschriebenen Verfahren hinreichend und eben so wenig bedarf es eines Beweises, dass durch ihre zweite Vor-

ſchrift keine Binionen mit Wiederholungen und daher auch durch ihre dritte Vorſchrift keine Complexionen mit Wiederholungen entſtehn können, daſs alſo die Auflöſung gewiſs nur Combinationen ohne Wiederholungen giebt. Man erhält aber durch ſie auch alle Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe ν; denn in der zweiten Klaſſe kann keine fehlen, weil dieſes den Mangel derjenigen wieder vorausſetzen würde, die man aus der fehlenden bekömmt, wenn man ihr erſtes Element in das nächſtvorhergehende und das letzte in das nächſtfolgende des Zeigers verwandelt. Fehlte aber dieſe, ſo würde dies den Mangel einer andern erfordern, welche aus ihr auf die nämliche Weiſe gemacht werden kann und es iſt klar daſs ſich dieſes Raiſonnement ſo weit fortſetzten läſst bis man gezeigt hat, daſs auch die übergangen ſeyn müſste aus welcher, auf die angegebene Weiſe, weiter keine Binion hergeleitet werden könnte. Da nun dieſe die zuerſt hingeſchriebene Binion iſt, alſo gewiſs nicht fehlt, ſo iſt einleuchtend daſs auch irgend eine andere nicht fehlen kann.

Iſt dieſes aber der Fall, ſo kann auch in irgend einer der folgenden Klaſſen keine Complexion übergangen werden, weil der Mangel einer Complexion eines höhern Exponenten als die Binion hat, vorausſetzt, daſs eine Binion verfehlt iſt. Es läſst ſich nämlich aus einer jeden Ntion, wenn ſie ſich nicht mit dem erſten Elemente des Zeigers anfängt, auf die Weiſe wie bei den Binionen angegeben iſt, eine vorhergehende Ntion machen, aus dieſer wieder eine andere u. ſ. f. bis man auf eine ſolche kömmt deren erſtes Element das erſte des Zeigers iſt. Fehlte alſo irgend eine Ntion, die nicht das erſte Element des Zeigers zum Anfangselemente hat, ſo müſste auch eine ſolche fehlen, deren Anfangselement das erſte des Zeigers iſt. Aus dieſer läſst ſich aber dadurch die N—1tion machen, aus welcher ſie nach der Auflöſung entſtehn würde, daſs man ihr das erſte Element nimmt und für ihr

letztes

letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt, folglich iſt einleuchtend, daſs der Mangel irgend einer Ntion den einer N—1tion bedingt, und daſs daher keine Complexion irgend einer ſpätern Klaſſe, als die zweite iſt, übergangen werden kann wofern nicht eine Binion übergangen iſt. Denn nach dieſem Raiſonnement folgt z. B. aus dem Mangel einer Quaternion wieder der Mangel einer Ternion und hieraus wieder der einer Binion.

Beiſpiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & 12, & 13 \\ a, & b, & c, & d \ldots & m, & n \end{pmatrix}$$

13	¹³A'	n	¹³A'
1 12		a m	
2 11		b l	
3 10	¹³B'	c k	¹³B'
4 9		d i	
5 8		e h	
6 7		f g	
1 2 10		a b k	
1 3 9		a c i	
1 4 8	¹³C'	a d h	¹³C'
1 5 7		a e g	
2 3 8		b c h	
2 4 7		b d g	
2 5 6		c d f	
3 4 6	¹³D'	a b c g	¹³D'
1 2 3 7		a b d f	
1 2 4 6		a c d e	
1 3 4 5			

1. *Anmerkung.*

Die Darſtellung welche die Auflöſung giebt, iſt keine Involution weil ſelbſt die erſten Erforderniſſe derſelben ihr fehlen. Wollte man ſie für eine Involution nehmen, ſo könnte ſie nur als eine ſehr unvollſtändige Klaſſeninvolution angeſehen werden.

2. *An-*

2. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung entſteht ſogleich aus der zweiten Auflöſung der Aufgabe des §. 29 wenn man dieſe dahin abändert daſs ſie keine Wiederholungen mehr geben kann. Für die dritte Auflöſung des §. 29 giebt es aber hier keine ähnliche.

Darſtellung einzelner Klaſſen der Combinationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 36.

Aufgabe.

Es wird die mte Klaſſe zur Summe ν für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3 \cdot 4,\ 5,\ 6 \ldots \nu}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \ldots n}$ verlangt,

Auflöſung.

1) Man ſuche im Zeiger von der Rechten nach der Linken das Element auf, welches von dem vorletzten angerechnet das $\frac{m \cdot m-1}{2}$ te iſt.

2 Dieſem ſetze man das m—1te Element des Zeigers vor, ſo hat man eine Binion. Das erſte Element dieſer Binion verwandele man in das nächſtfolgende und das letzte Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers. Eben ſo verfahre man wieder mit der jetzt erhaltenen Binion und ſetze dies fort bis man dadurch eine Binion bekömmt, deren zwei Elemente entweder zwei zunächſt auf einander folgende des Zeigers ſind oder zwiſchen welchen ſich im Zeiger nur ein Element befindet.

3) Den ſämmtlichen Binionen ſchreibe man das m—2te Element des Zeigers vor. Iſt es geſchehn, ſo ſuche man unter den hierdurch entſtandenen Ternionen die auf, welche ſich weder mit zwei zunächſt auf einander

ander folgenden Elementen anfangen noch endigen uud setze für ihr erstes Element das nächstfolgende und für ihr letztes das nächstvorhergehende des Zeigers. Auf die nämliche Weise leite man aus den jetzt gefundenen Ternionen wieder andere her und fahre hiermit überhaupt so lange fort bis man auf Ternionen einer gewissen Ordnung kömmt, auf welche diese Regel nicht weiter anzuwenden ist.

4) Vor alle Ternionen setze man das m—3te Element des Zeigers und folgere aus den Quaternionen, die hierdurch entstehn wieder eben so andere, wie man aus den Ternionen der Ordnung des m—2ten Elements die übrigen herleitet.

5) Die Vorschriften 3) und 4) wende man mit gehöriger Veränderung wieder an um aus den gefundenen Quaternionen, Quinionen zu folgern und wiederhole überhaupt diese Operation so lange bis man alle durch sie zu findende M—1tionen bekommen und aus diesen die Mtionen hergeleitet hat.

Beweis.

1) Es ist klar, dass alle erhaltene Mtionen einerlei Summe haben, weil den construirten Binionen einerlei Summe zukömmt, und daher auch den hieraus abgeleiteten Ternionen u. s. f.; hat also die erste Mtion die verlangte Summe ν, so haben auch die übrigen Mtionen diese Summe. Dass aber die erste Mtion die Summe ν hat, erhellet so: Das vorletzte Element des Zeigers hat die Summe $\nu-1$, das nach der Linken hin auf dieses folgende besitzt die Summe $\nu-2$, das diesem folgende Element des Zeigers, hat die Summe $\nu-3$ u. s. w. so dass also das Element, welches von dem vorletzten des Zeigers nach der Linken gezählt das $\frac{m.m-1}{2}$te ist, gleich $\nu-\frac{m.m-1}{2}$ seyn muss. Dieses Element macht aber

der

der Auflösung gemäſs, mit den $m-1$ Elementen $1, 2, 3, 4 \ldots, m-1$ die erſte Mtion aus, folglich muſs auch, da $1+2+3+4+\ldots+m-1=\frac{m.m-1}{2}$ iſt, die erſte Mtion die Summe $\nu-\frac{m.m-1}{2}+\frac{m.m-1}{2}=\nu$ haben.

2) Die erſte Binion welche die Auflöſung giebt fängt ſich mit dem $m-1$ten Elemente des Zeigers an und hat deswegen die Summe $m-1+\nu-\frac{m.m-1}{2}$

$$=\nu-\frac{m.m-1}{2}+m-1=\nu-\left(\frac{m.m-1}{2}-(m-1)\right)$$

$$=\nu-\left(\frac{m.(m-1)-2(m-1)}{2}\right)=\nu-\frac{(m-2)\,m-1}{2}.$$

Da dies der Fall iſt, ſo muſs auch die Auflöſung alle geſuchte Mtionen geben.

Es läſst ſich nämlich eine jede der geſuchten Mtionen wenn ſie ſich nicht mit a anfängt dadurch, daſs man ſucceſſiv für ihr erſtes Element das nächſtvorhergehende und für ihr letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt auf eine gutgeordnete Mtion zur Summe ν ohne Wiederholungen reduciren, deren Anfangselement das erſte des Zeigers, alſo *a* iſt. Nimmt man einer ſolchen das erſte Element, ſo bekömmt man eine M—1tion zur Summe $\nu-1$ die ſich entweder mit *b* oder einem höhern Elemente des Zeigers anfängt, aus welcher die Auflöſung gedachte Mtion der Ordnung a und daher auch mittelbar die Ntion ableitet, welche ſich auf dieſe Mtion der Ordnung *a* auf angegebene Weiſe reduciren läſst. Iſt das Anfangselement genannter M—1tion ein höheres als b, ſo läſst ſie ſich auf eine M—1tion zur Summe $\nu-1$ mit dem Anfangselemente *b* zurückführen, wenn man wieder mit ihrem erſten und letzten Elemente die Subſtitution vornimmt durch welche eine jede Mtion zur Summe ν, wenn

wenn sie sich nicht mit a anfängt auf eine solche zurückgeführt wird. Es setzt also der Mangel irgend einer Mtion den einer M—1tion zur Summe $\nu-1$ mit dem Anfangselemente b voraus. Wird dieser M—1tion das Element b genommen, so bekömmt man eine M—2tion zur Summe $\nu-(1+2)$ die entweder c oder ein höheres Element des Zeigers zum Anfangselemente hat, aus welcher man also durch ein Vorsetzen des b die fehlende M—1tion der Ordnung b bekäme. Hat die M—2tion ein höheres Element als c ist zum Anfangselemente, so kann man sie wieder durch eine fortgesetzte Verwandlung ihres ersten Elements in das nächstvorhergehende und ihres letzten Elements in das nächstfolgende des Zeigers auf eine M—2tion der nämlichen Summe mit dem Anfangselemente c reduciren. Das Fehlen einer M—2tion und daher auch der Mangel einer Mtion bedingt also, daſs man durh die Auflösung eine gewisse M—2tion zur Summe $\nu-(1+2)$ mit dem Anfangselemente c nicht erhält. Hieraus erhellet schon daſs durch Fortsetzen dieses Raisonnement sich zeigen läſst, daſs die Auflösung nur dann eine verlangte Mtion nicht giebt wenn man durch sie eine gutgeordnete M—2tion ohne Wiederholungen zur M—(m—2)tio Summe $\nu-(1+2+3+..m-2)$ die sich mit dem m—1ten Elemente des Zeigers anfängt d. h. eine Combinationsbinion ohne Wiederholungen zur Summe $\nu-\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ mit dem genannten Anfangselemente nicht bekömmt. Da man nun diese aber gewiſs nicht übergeht, so ist auch einleuchtend, daſs die Auflösung alle verlangte Mtionen geben muſs.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots & 10, & 11, & 12 \;.. & 22 \\ a, & b, & c, & d, & e \ldots & k, & l & m \;.. & w \end{pmatrix}$$

$^{22}E'$

1	2	3	4	12	a	b	c	d	m
1	2	3	5	11	a	b	c	e	l
1	2	3	6	10	a	b	c	f	k
1	2	3	7	9	a	b	c	g	i
1	2	4	5	10	a	b	d	e	k
1	2	4	6	9	a	b	d	f	i
1	2	4	7	8	a	b	d	g	h
1	2	5	6	8	a	b	e	f	h
1	3	4	5	9	a	c	d	e	i
1	3	4	6	8	a	c	d	f	h
1	3	5	6	7	a	c	e	f	g
2	3	4	5	8	b	c	d	e	h
2	3	4	6	7	b	c	d	f	g

Anmerkung.

Aus der Methode der Auflöſung, das Verlangte darzuſtellen, erhellet daſs ſie involutoriſch iſt. Sie giebt aber, wie man ſchon aus den beiden Beiſpielen ſieht, keine vollſtändige Involutionen.

§. 37.

Anmerkung.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen läſst ſich für jede einzelne Klaſſe alſo auch für alle Klaſſen insgeſammt, durch die in §. 33. angeführte Tabelle leicht berechnen.

ε. Von dem Combiniren mehrerer Reihen.

§. 38.

Erklärung.

Das Combiniren mehrerer Reihen beſteht darinn, daſs man mehrere in Rückſicht auf ihre Glieder ver-

verschiedene Elementenreihen auf eine und dieselbe Zahlenreihe bezieht, wie bisher die Reihe a, b, c, d . . . auf die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . bezogen ist und dass man, anstatt die Combinationen, welche eine gewisse Aufgabe verlangt, bloss aus den Elementen einer und derselben Reihe zu bilden, die Unionen aus der ersten Reihe hebt; die Elemente welche diesen vorgesetzt werden, um die Binionen zu bekommen, aus der zweiten Reihe; die Elemente welche diesen vorgeschrieben werden um die Ternionen zu erhalten aus der dritten Reihe nimmt u. s. w. und zwar so, dass man jedesmal das Element einer Reihe zum Vorsetzen gebraucht, dessen Zeigerzahl mit derjenigen des Elements der ersten Reihe übereinstimmt, welches man würde dazu genommen haben, wenn die Combinationen bloss aus den Elementen dieser ersten Reihe hätten gebildet werden sollen.

Zusatz.

Es finden bei dem Combiniren mehrerer Reihen alle Aufgaben statt, welche für das Combiniren der Elemente einer einzigen Reihe gelten und man weiss für eine Aufgabe die Combinationen mehrerer Reihen zu finden, so bald man diese für eine einzige Reihe zu finden weiss.

Anmerkung.

Es bedürfen also die Aufgaben für das Combiniren mehrerer Reihen keiner eigenen Auflösung, sondern es kommen ihnen die nämlichen zu, welche für die Aufgaben in Rücksicht auf eine und dieselbe Elementenreihe gegeben sind, nur mit dem Unterschiede, dass man bei mehreren Reihen, die Elemente, welche zum Vorsetzen gebraucht werden, aus der zweiten, dritten Reihe u. s. w. nehmen muss, wie in der Erklärung bestimmt ist. Aus diesem Grunde sollen für die Combinationen mehrerer Reihen die Aufgaben zwar aufgestellt aber statt der Auf-

löſung ſoll nur die Darſtellung hingeſetzt werden, die man durch die Auflöſung erhalten würde.

1. *Willkührlicher Satz.*

Die einzelnen Elemente jeder Reihe bezeichnet man wie gewöhnlich mit Buchſtaben, wie dieſe im Alphabethe auf einander folgen, bedient ſich aber hierzu für eine jede Reihe eines eigenen Alphabeths. Zur Bezeichnung ganzer Reihen gebraucht man die einzelnen Buchſtaben, p, q, r, s, u. ſ. f.; π, ϱ, σ u. ſ. w. Dies giebt die Zeiger:

$$\left\{\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots = r\end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots = s\end{matrix}\right\}$$

u. ſ. w.

2. *Willkührlicher Satz.*

Die Zeichen für die Combinationsklaſſen mehrerer Reihen ſind die gewöhnlichen, nur daſs man noch die Zeichen der Reihen, worauf ſich die Klaſſen beziehn in der Ordnung darüber ſchreibt, daſs r vor q, q vor p geſetzt wird u. ſ. w. wenn in den Species der Klaſſen die Elemente der Reihe r vor den Elementen der Reihe q ſtehn u. ſ. w. z. B. $\overset{q}{A}$, $\overset{qp}{B}$, $\overset{rqp}{C}$, u. ſ. f.

Combinationen überhaupt.

§. 39.

Aufgabe.

Es werden für den hierunter befindlichen Zeiger die Combinationen mit Wiederholungen verlangt.

$$\left\{\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d = p \\ A, B, C, D = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} = s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

1)

a	b	c	d	p A'
Aa	Ab	Ac	Ad	
	Bb	Bc	Bd	qp B'
		Cc	Cd	
			Dd	
aAa	aAb	aAc	aAd	
	aBb	aBc	aBd	
		aCc	aCd	rqp C'
			aDd	
	bBb	bBc	bBd	
		bCc	bCd	
			bDd	
		cCc	cCd	
			cDd	
			dDd	
𝔄aAa	𝔄aAb	𝔄aAc	𝔄aAd	
	𝔄aBb	𝔄aBc	𝔄aBd	srqp D'
		𝔄aCc	𝔄aCd	
			𝔄aDd	
	𝔄bBb	𝔄bBc	𝔄bBd	
		𝔄bCc	𝔄bCd	
			𝔄bDd	

u. s. w.

vide pag. 55.

2)

𝔄 a A a
𝔄 a A b
𝔄 a A c p A'
𝔄 a A d
𝔄 a B b
𝔄 a B c
𝔄 a B d
𝔄 a C c
𝔄 a C d qp
𝔄 a D d B'
𝔄 b B b
𝔄 b B c
𝔄 b B d
𝔄 b C c
𝔄 b C d
𝔄 b D d
𝔄 c C c
𝔄 c C d
𝔄 c D d rqp
𝔄 d D d C'
𝔅 b B b

u. s. w.

vide pag. 60.

2. *Aufgabe.*

Es sollen für den Zeiger der ersten Aufgabe die Combinationen ohne Wiederholungen angegeben werden.

Auflösungen.

1)

a	b	c	d	p A'
	Ab	Ac	Ad	
		Bc	Bd	qp B'
			Cd	
		aBc	aBd	rqp C'
			aCd	
			bCd	
			𝔄bCd	srqp D'

pag. 73.

2)

p A'
a
A b
A c
A d
qp B'
a B c
a B d
a C d
rqp C'
𝔄 b C d
srqp D'

pag. 76.

3. Aufgabe.

Es soll für den hierunter stehenden Zeiger die fünfte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen dargestellt werden.

$$\left[\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g = p \\ A, B, C, D, E, F, G = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{g} = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G} = s \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta = \pi \end{array}\right]$$

Auflösungen.

1)

$\overset{\pi srqp}{F'}$

α	𝔅	𝔠	D	e
α	𝔅	𝔠	D	f
α	𝔅	𝔠	D	g
α	𝔅	𝔠	E	f
α	𝔅	𝔠	E	g
α	𝔅	𝔠	F	g
α	𝔅	𝔡	E	f
α	𝔅	𝔡	E	g
α	𝔅	𝔡	F	g
α	𝔅	𝔢	F	g
α	ℭ	𝔡	E	f
α	ℭ	𝔡	E	g
α	ℭ	𝔡	F	g
α	ℭ	𝔢	F	g
α	𝔇	𝔢	F	g
β	ℭ	𝔡	E	f
β	ℭ	𝔡	E	g
β	ℭ	𝔡	F	g
β	ℭ	𝔢	F	g
β	𝔇	𝔢	F	g
γ	𝔇	𝔢	F	g

pag. 82.

2)

$\overset{\pi srqp}{F'}$

α	𝔅	𝔠	D	e
α	𝔅	𝔠	D	f
α	𝔅	𝔠	D	g
α	𝔅	𝔠	E	f
α	𝔅	𝔠	E	g
α	𝔅	𝔠	F	g
α	𝔅	𝔡	E	f
α	𝔅	𝔡	E	g
α	𝔅	𝔡	F	g
α	𝔅	𝔢	F	g
α	ℭ	𝔡	E	f
α	ℭ	𝔡	E	g
α	ℭ	𝔡	F	g
α	ℭ	𝔢	F	g
α	𝔇	𝔢	F	g
β	ℭ	𝔡	E	f
β	ℭ	𝔡	E	g
β	ℭ	𝔡	F	g
β	ℭ	𝔢	F	g
β	𝔇	𝔢	F	g
γ	𝔇	𝔢	F	g

pag. 84.

Combinationen zu bestimmten Summen.

§. 40.

1. *Aufgabe.*

Es wird die Entwickelung der Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 5, für hierunter befindlichen Zeiger verlangt.

1, 2, 3, 4, 5
a, b, c, d, e = p
A, B, C, D, E = q
𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, 𝔢 = r
𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈 = s
α, β, γ, δ, ε = t

Auflösungen.

1)

$\overset{p}{{}^{5}A}$: e

$\overset{qp}{{}^{5}B}$: A d, B c

$\overset{rqp}{{}^{5}C}$: 𝔞 A c, 𝔞 B b

$\overset{srqp}{{}^{5}D}$: 𝔄 𝔞 A b

$\overset{tsrqp}{{}^{5}E}$: α 𝔄 𝔞 A a

pag. 87.

2)

α | 𝔄 | 𝔞 | A | a
𝔄 | 𝔞 | A | b
𝔞 | A | c
𝔞 | B | b
A | d
(B | c
(C

pag. 95.

Anmerkung.

Bei der zweiten Darstellung ist für das Vorschreiben des ersten Elements, um aus den Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe, die Complexionen der Ordnung des ersten Elements des Zeigers zur nächstfolgenden grössern Summe zu erhalten, diese Vorschrift zu beobachten, dass man jedesmal das erste Ele-

 ment

ment derjenigen Reihe dazu nehmen muſs, welche im Zeiger zunächſt auf d i e folgt, zu welcher das erſte Element der Complexion gehört, vor die das erſte Element des Zeigers geſetzt werden ſoll.

2. *Aufgabe.*

Die dritte Klaſſe der Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 12, darzuſtellen.

Zeiger.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	. .	
a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i	. .	= p
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	H,	I	. .	= q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢,	𝔣,	𝔤,	𝔥,	𝔦	, .	= r
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈,	𝔉,	𝔊,	ℌ,	ℑ	. .	= s

Auflöſung.

$^{12}D^{srqp}$

𝔄	𝔞	A	i
𝔄	𝔞	B	h
𝔄	𝔞	C	g
𝔄	𝔞	D	f
𝔄	𝔞	E	e
𝔄	𝔟	B	g
𝔄	𝔟	C	f
𝔄	𝔟	D	e
𝔄	𝔠	C	e
𝔄	𝔠	D	d
𝔅	𝔟	B	f
𝔅	𝔟	C	e
𝔅	𝔟	D	d
𝔅	𝔠	C	d
ℭ	𝔠	C	c

pag. 109.

3. *Aufgabe.*

Für den Zeiger der zweiten Aufgabe die Combinationen o h n e Wiederholungen zur Summe 13, zu entwickeln.

Auf-

Auflösung.

n	$^{13}\overset{p}{A}'$
Am	
Bl	
Ck	$^{13}\overset{qp}{B}'$
Di	
Eh	
Fg	
𝔞Bk	
𝔞Ci	$^{13}\overset{rqp}{C}'$
𝔞Dh	
𝔞Eg	
𝔟Ch	
𝔟Dg	
𝔠Df	
𝔄𝔟Cg	
𝔄𝔟Df	$^{13}\overset{srqp}{D}'$
𝔄𝔠De	

pag. 123.

4. *Aufgabe.*

Es ſoll die fünfte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe 22, dargeſtellt werden.

Zeiger.

1,	2,	3,	4,	5	. . .	10,	11,	12	. .	22
a,	b,	c,	d,	e	. . .	k,	l,	m	. .	w = p
A,	B,	C,	D,	E	. . .	K,	L,	M	. .	W = q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢	. . .	𝔨,	𝔩,	𝔪	. .	𝔴 = r
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈	. . .	𝔎,	𝔏,	𝔐	. .	𝔚 = s
α,	β,	γ,	δ,	ε	. . .	κ,	λ,	μ	. .	χ = π

Auflösung.

$^{22}D^{\pi s r q p}$

α	𝔅	𝔠	D	m
α	𝔅	𝔠	E	l
α	𝔅	𝔠	F	k
α	𝔅	𝔠	G	i
α	𝔅	𝔡	E	k
α	𝔅	𝔡	F	i
α	𝔅	𝔡	G	h
α	𝔅	𝔢	F	h
α	ℭ	𝔡	E	i
α	ℭ	𝔡	F	h
α	ℭ	𝔢	F	g
β	ℭ	𝔡	E	h
β	ℭ	𝔡	F	g

pag. 128.

§. 41.

Anmerkung.

Bei dem Combiniren mehrerer verschiedenen Reihen, kann keine Combination ein Element einer und derselben Reihe öfter als *einmal* enthalten, folglich fällt hier auch die Anwendung des Wiederholungsexponenten weg, und daher kann es hier auch keine Gleichungen geben, welche mit denjenigen für das Combiniren der Elemente *einer* Reihe correspondirten, in welchen die Wiederholungsexponenten vorkommen. Hingegen alle übrige durch Klassen ausgedrückte Gleichungen, welche die Combinationen der Elemente *einer* Reihe geben, gelten mit gehörigen Veränderungen auch für die Combinationen mehrerer unter sich verschiedener Elementenreihen.

Z. B. für den hierunter befindlichen Zeiger in welcher π die *n*te Elementenreihe ſeyn mag, wird aus der Gleichung des erſten Zuſatzes in §. 24., dieſe:

$$\left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4\,.. & \\ a, & b, & c, & d\,.. & = p \\ A, & B, & C, & D\,.. & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}\,.. & = r \\ .. & .. & .. & .. & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta\,.. & = \pi \end{matrix}\right]$$

$$\overset{\pi..rqp}{'J} = \overset{p}{'A} + \overset{qp}{'B} + \overset{rqp}{'C} + \overset{srqp}{'D} + \ldots\ldots + \overset{\pi..rqp}{'\mathfrak{N}}.$$

$$\left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4\,.. & \\ a, & b, & c, & d\,.. & = p \\ A, & B, & C, & D\,.. & = q \\ .. & .. & .. & .. & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta\,.. & = \pi \end{matrix}\right]$$

Das hier im allgemeinen geſagte wird es unnöthig machen die übrigen Gleichungen aufzuſtellen, welche noch für die Combinationen mehrerer Reihen ſtatt finden,

5. Von den Variationen.

§. 42.

1. *Erklärung.*

Das Variiren wird eingetheilt in Variiren überhaupt und Variren zu beſtimmten Summen.

2. *Erklärung.*

Variiren überhaupt heiſst alle mögliche gut-geordnete und ſchlechtgeordnete Complexionen darſtellen, welche für gewiſse gegebene Elemente ſtatt finden. Eine jede dieſer Complexionen wird eine Variation genannt und der Inbegriff aller Variationen, die zu einer und derſelben Klaſſe gehören macht eine Variationsklaſſe aus.

Das Zeichen des Variirens überhaupt

für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ ist: Vr $\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$ Spl. wo Vr, Variatio und Spl. wieder simplex bedeutet. (§. 23, 2. Erkl.)

Zusatz.

Die Combinationen mehrerer gegebener Elemente machen mit ihren Versetzungen alle Variationen dieser Elemente aus. (§. 23, 2. Erkl. Anmerk.)

3. *Erklärung.*

Wird beim Variren mehrerer Elemente so verfahren, als sey ein jedes derselben mehreremal, und wofern nichts darüber festgesetzt ist, unendliche mal gegeben, so variirt man mit Wiederholungen.

Das hierhergehörige Zeichen ist für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ dieses: Vr, $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ Spl. a. r.

Bedient man sich beim Variiren der eben gedachten Wiederholungen nicht, so variirt man ohne Wiederholungen.

Das Zeichen hierfür ist für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ dieses: Vr $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ Spl. o. r.

Man vergleiche hiermit pag. 52, 4. Erkl.

4. *Erklärung.*

Variiren zu einer bestimmten Summe, heisst für einen gegebenen Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ nicht alle sondern nur die Variationen darstellen, deren Elementensumme eine gewisse bestimmte ist.

Die

Die Zeichen hierfür ſind:

$$Vr.\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}\text{num. } n,\ a.\ r \text{ und } Vr.\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}\text{num. } n,\ o.\ r.$$

Man vergleiche hiermit pag. 52, 5. Erkl.

5. *Erklärung.*

Die einzelnen Variationscomplexionen zur Summe n, werden Variationszerfällungen der Zahl n genannt.

Willkührlicher Satz.

Die Zeichen für die Variationsklaſſen und Involutionen, ſind die nämlichen deren man ſich hierfür bei den Combinationen bedient, nur mit dem Unterſchiede, daſs man beim Variiren nicht dazu die gradeſtehende, ſondern die ſchiefſtehende Schrift gebraucht. So z. B. Bezeichnet man die erſte, zweite, dritte Klaſſe der Variationen überhaupt mit Wiederholungen, mit *'A, 'B, 'C.*

6. *Erklärung.*

Zum Variiren iſt entweder nur *eine* Elementenreihe oder es ſind mehrere dergleichen gegeben, die aber in Rückſicht auf ihre Elemente unter ſich verſchieden ſind.

Anmerkung.

Es bezieht ſich das bis jetzt vom Variiren geſagte zunächſt auf das Variiren der Elemente *einer* Reihe, daher auch dieſes zuerſt abgehandelt und das Variiren *mehrerer* Reihen unter der Überſchrift *von dem Variiren mehrerer Reihen* zuletzt beſonders vorgetragen wird.

α) Von dem Variiren überhaupt mit Wiederholungen.

§. 43.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots \end{pmatrix}$ alle Variationen mit zugelassenen Wiederholungen zu finden.

1)

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die Unionen 1, 2, 3, 4... in der Ordnung neben einander, wie sie im Zeiger geordnet sind, so hat man die erste Klasse ($'A$) der Zahlenvariationen.

2) Aus $'A$ leite man $'B$, aus $'B$ wieder $'C$, aus $'C$ wieder $'D$ u. s. w. ab, wie in §. 7. aus den einzifrigen Zahlen die zweizifrigen aus diesen die dreizifrigen hergeleitet werden u. s. w. und schreibe hierbei die zweite Klasse unter die erste, die dritte unter die zweite u. s. f.

Die Substitution der Buchstaben, für die mit ihnen correspondirenden Elemente der gefundenen Zahlenvariationen, giebt die verlangten Buchstaben-variationen.

Beweis.

Eine jede Variation der Zahlenelemente des Zeigers kann als eine Zahl angesehen werden, folglich erhält man durch die gegebenen Vorschriften gewiss alle Zahlen-variationen, weil sie alle mögliche Zahlen giebt, die sich mit den gegebenen Zahlenelementen bei zugelassenen Wiederholungen schreiben lassen und daher muss auch die angegebene Substitution der Buchstaben, alle Buchstaben-variationen geben, weil eine jede derselben mit einer Zahlenvariation correspondirt.

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$

'A	1	2	3	4	a	b	c	d	'A
	11	12	13	14	aa	ab	ac	ad	
'B	21	22	23	24	ba	bb	bc	bd	'B
	31	32	33	34	ca	cb	cc	cd	
	41	42	43	44	da	db	dc	dd	
	111	112	113	114	aaa	aab	aac	aad	
	121	122	123	124	aba	abb	abc	abd	
	131	132	133	134	aca	acb	acc	acd	
	141	142	143	144	ada	adb	adc	add	
	211	212	213	214	baa	bab	bac	bad	
'C	"	"	"	"	"	"	"	"	'C
	241	242	243	244	bda	bdb	bdc	bdd	
	311	312	313	314	caa	cab	cac	cad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	341	342	343	344	cda	cdb	cdc	cdd	
	411	412	413	414	daa	dab	dac	dad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	441	442	443	444	dda	ddb	ddc	ddd	
	1111	1112	1113	1114	aaaa	aaab	aaac	aaad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	1441	1442	1443	1444	adda	addb	addc	addd	
	2111	2112	2113	2114	baaa	baab	baac	baad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
'D	2441	2442	2443	2444	bdda	bddb	bddc	bddd	'D
	3111	3112	3113	3114	caaa	caab	caac	caad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	3441	3442	3443	3444	cdda	cddb	cddc	cddd	
	4111	4112	4113	4114	daaa	daab	daac	daad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	4441	4442	4443	4444	ddda	dddb	dddc	dddd	
	u.	f.	w.		u.	f.	w.		

2.

a) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man fchreibe die Elemente a, b, c, d, e . . . x, als Unionen in der Ordnung wie fie jetzt genannt find neben einander, fo hat man 'A.

2) Einer jeden Complexion der $'A$ setze man erst a vor, so hat man die Binionen der Ordnung *a*; hierauf schreibe man vor jede Complexion der $'A$ das Element b, so bekömmt man die Binionen der Ordnung *b*; eben so suche man die Binionen der Ordnung *c*, der Ordnung *d* u. s. f. der Ordnung jedes der übrigen Elemente des Zeigers. Ist dieses geschehn so hat man $'B$.

3) Auf die nämliche Weise, wie man $'B$ aus $'A$ erhält, leite man aus $'B$ wieder $'C$, aus $'C$ wieder $'D$, aus $'D$ wieder $'E$ her u. s. f.

Beweis.

Es ist nicht möglich, dass hier irgend eine gutgeordnete oder schlechtgeordnete Complexion übergangen werden kann, die sich aus den Elementen a, b, c, d u. s. w. machen lässt, weil dies den Mangel einer der zuerst hingeschriebenen Unionen voraussetzen würde. Denn gesetzt man erhielte durch die gegebenen Vorschriften die Complexion aacbd nicht, so müsste man durch sie auch nicht acbd, ferner cbd, bd und so auch d nicht erhalten,

Die zur ersten Auflösung gegebenen Beispiele gehören auch hierher.

Anmerkung.

In den gegebenen beiden Beispielen lassen sich zwar die erste und zweite Klasse der drei Elemente a, b, c, der zwei Elemente b und c und des einen Elements c aus der ersten und zweiten Klasse der Elemente a, b, c, und d leicht durch ein Linienziehn herausheben, für die übrigen Klassen ist dies aber nicht der Fall. Es giebt also hier für die Variationen keine solche Involution, wie die

zweite

zweite Auflösung der Aufgabe des §. 24 für die Combinationen darstellt.

3.

β) *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man setze die gegebenen Elemente a, b, c, d u. s. w. in der Ordnung wie sie jetzt genannt sind unter einander, so hat man $'A$.

2) Sämmtlichen Unionen schreibe man *a* vor; dies giebt die Binionen der Ordnung *b*. Das erste Element jeder dieser Binionen verwandele man in das nächstfolgende des Zeigers, so erhält man die Binionen der Ordnung *c*. Auf dieselbe Weise folgere man hieraus die der Ordnung *d*, aus diesen wieder die der Ordnung *e* und setze dieses so lange fort, bis man alle Binionen der Ordnung des letzten Elements des Zeigers erhalten hat, welche nach dieser Vorschrift gefunden werden können. Sämmtliche gefundene Binionen machen $'B$ aus.

3) Auf die nämliche Weise wie man $'B$ aus $'A$ abgeleitet hat, leite man wieder $'C$ aus $'B$, $'D$ aus $'C$ her u. s. f.

Beweis.

Eine Vergleichung dieser zweiten rein combinatorischen Auflösung mit der ersten zeigt sogleich, dass beide nur einerlei Complexionen geben können, und dass daher die zweite Auflösung richtig ist, sobald es die erste ist.

Beispiele.

1) $\binom{1\ 2\ 3\ 4}{a\ b\ c\ d}$ 2)

	a	a	a	a			1	1	1	1	
	a	a	a	b			1	1	1	2	
	a	a	a	c	A		1	1	1	3	A
	a	a	a	d			1	1	1	4	
	a	a	b	a			1	1	2	1	
	a	a	b	b			1	1	2	2	
u.	a	a	b	c		u.	1	1	2	3	
	a	a	b	d			1	1	2	4	
	a	a	c	a			1	1	3	1	
	a	a	c	b			1	1	3	2	
	a	a	c	c			1	1	3	3	
	a	a	c	d			1	1	3	4	
	a	a	d	a			1	1	4	1	
ſ.	a	a	d	b		ſ.	1	1	4	2	
	a	a	d	c			1	1	4	3	
	a	a	d	d	B		1	1	4	4	B
	a	b	a	a			1	2	1	1	
	"	"	"	"			"	"	"	"	
	a	b	d	d			1	2	4	4	
	a	c	a	a			1	3	1	1	
w.	"	"	"	"		w.	"	"	"	"	
	a	c	d	d			1	3	4	4	
	a	d	a	a			1	4	1	1	
	"	"	"	"			"	"	"	"	
	a	d	d	d	C		1	4	4	4	C
	b	a	a	a			2	1	1	1	
	u. ſ. w.						u. ſ. w.				

$\binom{0,\ 1}{a,\ b}$

$\binom{0,\ 1}{a,\ b}$

3)

	0 0 0 0 0	0
	0 0 0 0 1	1
	0 0 0 1 0	2
	0 0 0 1 1	3
u.	0 0 1 0 0	4
	0 0 1 0 1	5
	0 0 1 1 0	6
	0 0 1 1 1	7
	0 1 0 0 0	8
	0 1 0 0 1	9
	0 1 0 1 0	10
ſ.	0 1 0 1 1	11
	0 1 1 0 0	12
	0 1 1 0 1	13
	0 1 1 1 0	14
	0 1 1 1 1	15
	1 0 0 0 0	16
	1 0 0 0 1	17
w.	1 0 0 1 0	18
	1 0 0 1 1	19
	1 0 1 0 0	20
	1 0 1 0 1	21
	1 0 1 1 0	22
	1 0 1 1 1	23
	1 1 0 0 0	24
	1 1 0 0 1	25

u. ſ. w.

$\binom{0,\ 1,\ 2}{a,\ b,\ c}$

4)

	0 0 0 0	0
	0 0 0 1	1
	0 0 0 2	2
	0 0 1 0	3
u.	0 0 1 1	4
	0 0 1 2	5
	0 0 2 0	6
	0 0 2 1	7
	0 0 2 2	8
	0 1 0 0	9
	0 1 0 1	10
ſ.	0 1 0 2	11
	0 1 1 0	12
	0 1 1 1	13
	0 1 1 2	14
	0 1 2 0	15
	0 1 2 1	16
	0 1 2 2	17
w.	0 2 0 0	18
	0 2 0 1	19
	0 2 0 2	20
	0 2 1 0	21
	0 2 1 1	22
	0 2 1 2	23
	0 2 2 0	24
	0 2 2 1	25
	0 2 2 2	26
	1 0 0 0	27
	1 0 0 1	28

u. ſ. w.

$\binom{0,\ 1,\ 2,\ 3}{a,\ b,\ c,\ d}$

5)

	0 0 0 0	0
	0 0 0 1	1
	0 0 0 2	2
	0 0 0 3	3
u.	0 0 1 0	4
	0 0 1 1	5
	0 0 1 2	6
	0 0 1 3	7
	0 0 2 0	8
	0 0 2 1	9
	0 0 2 2	10
ſ.	0 0 2 3	11
	0 0 3 0	12
	0 0 3 1	13
	0 0 3 2	14
	0 0 3 3	15
	0 1 0 0	16
	" " " "	"
w.	0 1 3 3	31
	0 2 0 0	32
	" " " "	"
	0 2 3 3	47
	0 3 0 0	48
	" " " "	"
	0 3 3 3	63
	1 0 0 0	64

u. ſ. w.

1. *Anmerkung.*

Beide Auflösungen geben die Variationen so, daſs diese als Zahlen betrachtet wachsend fortlaufen und als Wörter eines Lexicons, lexicographisch fortgehn.

2. *Anmerkung.*

Wenn man das Gesetz kennen lernen will, nach welchen die Zahlen eines Zahlensystems fortlaufen, so hat man nur nöthig die Variationen der Grundzeichen desselben mit Wiederholungen aufzusuchen und zwar in der Ordnung, daſs man hierbei successiv von der kleinsten Zahl zu den gröſsern übergeht, Dies ist der Fall wenn man die Variationen der Grundzeichen nach einer der beiden gegebenen Auflösungen (1. *Anmerk.*) aufsucht, daher stellt das dritte Beispiel das Gesetz für das dyadische Zahlensystem, das vierte Beispiel das Gesetz für das triadische und das fünfte Beispiel das Gesetz für das tetradische Zahlensystem vor Augen. *a*).

Die Zahlen welche bei diesen drei Beispielen rechter Hand neben dem Doppelstriche stehn, sind die Zahlen des decadischen Systems, mit welchen die daneben liegenden Zahlen des dargestellten Systems correspondiren.

3. *Anmerkung.*

Die nämliche Anmerkung welche pag. 60 und 61 in Rücksicht auf die beiden rein combinatorischen Auflösungen der Aufgabe, alle Combinationen mit Wiederholungen zu finden, gegeben ist, gilt auch für die beiden rein combinatorischen Auflösungen, die für die Bestimmung der Variationen gegeben sind, wenn man in der genannten

a) Das dritte Beispiel nämlich, giebt die Variationen der Grundzeichen 0, 1; das vierte Beispiel die Variationen der Grundzeichen 0, 1, 2; das fünfte Beispiel die Variationen der Grundzeichen 0, 1, 2, 3.

ten Anmerkung die Behauptung übergeht daſs die erſte Auflöſung eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente giebt.

4. *Anmerkung.*

Die Involution, welche die zweite rein combinatoriſche Auflöſung giebt, läſst nicht ſolche Umwandelungen ihrer Form zu, wie im zweiten Zuſatze des §. 24 mit der Involution der Combinationen vorgenommen ſind. Für die Variationen giebt es daher auch nicht ſolche Gleichungen als im zweiten, dritten und vierten Zuſatze des §. 24 für die Combinationen aufgeſtellt ſind.

1. *Zuſatz.*

Aus der Darſtellung der zweiten rein combinatoriſche Auflöſung folgt dieſe Gleichung:

$$'J = {}'A + {}'B + {}'C + {}'D + {}'E + {}'F + .. + {}'\mathcal{N}.$$

2. *Zuſatz.*

Da man nach der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung die nächſtfolgende Variationsklaſſe erhält, wenn man allen Complexionen der nächſtvorhergehenden Klaſſe ſucceſſiv das erſte, zweite, dritte Element des Zeigers u. ſ. f. vorſetzt, ſo iſt die Gleichung für die Variationen, welche mit der des fünften Zuſatzes in §. 24 correſpondirt, dieſe:

$$\overset{0}{\mathcal{N}}_{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3\,..\\ a,\,b,\,c\,..\end{smallmatrix}\right)} = a\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}} + b\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}}_{\left(\begin{smallmatrix}1,\,2,\,3\,..\\ a,\,b,\,c\,..\end{smallmatrix}\right)} + {}'\overset{-1}{\mathcal{N}} + d\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}} + ..$$

3. *Zuſatz.*

Es hat eine jede Variationsklaſſe ſo viele Complexionen der einzelnen Ordnungen a, b, c, d u. ſ. f. als

die

die nächstvorhergehende Klasse Complexionen überhaupt hat.

Hiernach läſst ſich für die Variationen eine ſolche Figur zeichnen, wie für die Combinationen im 7ten Zuſatze des §. 24 gegeben iſt. Sie iſt für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$ dieſe:

	a	b	c	d	e
'A	1	1	1	1	1
'B	5	5	5	5	5
'C	5^2	5^2	5^2	5^2	5^2
'D	5^3	5^3	5^3	5^3	5^3
'E	5^4	5^4	5^4	5^4	5^4

. .

Sowohl das Geſetz nach welchen die horizontalen als auch das nach welchen die neben einander liegenden vertikalen Zahlenreihen fortlaufen liegt hier deutlich vor Augen; es macht alſo keine Schwierigkeit die Figur entweder durch ein Schreiben der vertikalen oder durch ein Schreiben der horizontalen Zahlenreihen ſo weit fortzuſetzen als man will.

Für m + 1 Klaſſen erhält die Figur bei r verſchiedenen Elementen a, b, c, . . . v, w, x, y, z dieſe Form:

	a	b	c	d	e w
'A	1	1	1	1	1 1
'B	r	r	r	r	r r
'C	r^2	r^2	r^2	r^2	r^2 . . . r^2
'D	r^3	r^3	r^3	r^3	r^3 . . . r^3
'E	r^4	r^4	r^4	r^4	r^4 . . . r^4
"	" "	" "	" "	" "	" " " "
$\overset{o}{M}$	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1} . . r^{m-1}
$\overset{+1}{M}$	r^m	r^m	r^m	r^m	r^m . . . r^m

§. 44.

Lehrſatz.

Die Anzahl der Complexionen der mten Variationsklaſſe mit Wiederholungen iſt für r verſchiedene Elemente, gleich r^m.

Beweis.

Die m+1te Klaſſe hat ſo viele Complexionen der Ordnung jedes einzelnen Elements des Zeigers als die mte Klaſſe Complexionen überhaupt hat, oder, welches einerlei iſt, der mten Klaſſe kommen ſo viele Complexionen zu, als die m+1te Klaſſe Complexionen von der Ordnung jedes der gegebenen Elemente beſitzt. Da nun nach der letzten Figur des §. 44, die m+1te Klaſſe von der Ordnung jedes der Elemente des Zeigers, r^m Complexionen hat, ſo muſs auch die mte Klaſſe r^m Complexionen haben,

α) Von den Variationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 45.

Aufgabe.

Es werden die Variationen ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots}{a,\ b,\ c,\ d \ldots}$ gesucht.

1.

β) *Rein combinatorische Auflösung.*

Man beobachte im Ganzen die Vorschriften der ersten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 44. setze aber nicht einer jeden Complexion der vorhergehenden Klasse, des Zeigers Element p vor, um die Complexionen der Ordnung p der nächstfolgenden Klasse zu erhalten, sondern schreibe dieses Element nur vor die Complexionen in welchen es sich nicht befindet.

Beweis.

Es ist einleuchtend, dass die Auflösung nur die Variationen nicht giebt, in welchen *ein* und dasselbe Element öfter als *ein*mal vorkömmt. Die Aufgabe verlangt aber auch nur die Variationen, welche *ein* und dasselbe Element nur *ein*mal enthalten, folglich ist die Auflösung auch richtig.

Beispiele.

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ a, & b, & c, & d \end{pmatrix}$

A`	a	b	c	d
	ab	ac	ad	
B`	ba	bc	bd	
	ca	cb	cd	
	da	db	dc	
	abc	abd	acb	
	acd	adb	adc	
	bac	bad	bca	
C`	bcd	bda	bde	
	cab	cad	cba	
	cbd	cda	cdb	
	dab	dac	dba	
	dbc	dca	dcb	
	abcd	abdc	acbd	
	acdb	adbc	adcb	
D`	bacd	badc	bcad	
	bcda	bdac	bdca	
	cabd	cadb	cbad	
	cbda	cdab	cdba	
	dabc	dacb	dbac	
	dbca	dcab	dcba	

A`	1	2	3	4
	12	13	14	
B`	21	23	24	
	31	32	34	
	41	42	43	
	123	124	132	
	134	142	143	
	213	214	231	
C`	234	241	243	
	312	314	321	
	324	341	342	
	412	413	421	
	423	431	432	
	1234	1243	1324	
	1342	1423	1432	
D`	2134	2143	2314	
	2341	2413	2431	
	3124	3142	3214	
	3241	3412	3421	
	4123	4132	4213	
	4231	4312	4321	

Anmerkung.

Die Auflösung giebt für die Variationen überhaupt ohne Wiederholungen, eine eben solche Darstellung, als die erste rein combinatorische Auflösung der Aufgabe des §. 43 für die Variationen überhaupt mit Wiederholungen, giebt.

Zusatz.

Aus der Art und Weise, wie die Auflösung aus einer Klasse die nächstfolgende herleitet, entsteht diese Gleichung:

$$\overset{0}{N}'_{\binom{1,\,2,\,3,\,4\,..}{a,\,b,\,c,\,d\,..}} = a\,\overset{-1}{N}'_{\binom{2,\,3,\,4\,..}{b,\,c,\,d\,..}} + b\,\overset{-1}{N}'_{\binom{1,\,3,\,4\,..}{a,\,c,\,d\,..}} + c\,\overset{-1}{N}'_{\binom{1,\,2,\,4\,..}{a,\,b,\,d\,..}} + \ldots$$

* * *

Die rein combinatorische Auflösung, nach welcher die Unionen unter einander geschrieben werden, wird hier übergangen, weil die Einfachheit wodurch sich diese Auflösung sonst empfiehlt, hier wegfällt.

Darstellung einzelner Klassen der Variationen überhaupt ohne Wiederholungen *a*).

§. 46.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ die *m*te Klasse der Variationen überhaupt ohne Wiederholungen darzustellen.

I.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die ersten *m* Elemente des Zeigers gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erste Complexion.

2) Man verwandele das *m*te Element, also das letzte der ersten Complexion, in das nächstfolgende des Zeigers, so

a) Hierher gehört, mit gehörigen Veränderungen, die nämliche Anmerkung, welche in §. 27 für die Combinationen gegeben ist.

so erhält man die zweite Complexion. Hieraus leite man auf die nämliche Weise die dritte, aus der dritten Complexion die vierte ab u. s. f. bis man auf diese Weise weiter keine Complexion finden kann.

3) In allen gefundenen Complexionen schreibe man für das m—1te also für das vorletzte Element das nächstfolgende des Zeigers und lasse die übrigen Elemente der Complexion unverändert ausser wenn man hierbei auf eine Complexion kömmt, deren *m*tes Element das genannte des Zeigers ist, denn in diesem Falle setzt man für dieses *m*te dasjenige, welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht. Ist dies geschehn so leitet man aus den jetzt gefundenen Complexionen auf die nämliche Weise wieder andere ab und setzt dies überhaupt so lange fort als möglich ist.

4) In einer jedem der durch 3) erhaltenen Complexionen substituire man für das m—2te Element dasjenige des Zeigers, welches ihm hierinn zunächst folgt und verändere ausser diesem m—2ten kein anderes Element der Complexionen, ausgenommen, wenn eines von denen, die auf das genannte m—2te folgen, mit dem Substituirten einerlei ist, weil in diesem Falle dafür dieses m—2te gesetzt werden muss. Mit den hierdurch entstandenen Complexionen nehme man dann wieder die nämliche Operation vor, wie auch mit denen die man hierdurch wieder bekommen hat und fahre hiermit überhaupt so lange fort als es nur immer geschehn kann.

5) Nach der nämlichen Vorschrift welche 4) giebt, folgere man aus den Complexionen die 4) gegeben hat wieder neue her, nur mit dem Unterschiede, dass bei dieser Ableitung, für das m—3te Element die Substitution geschehen muss.

6. Hieraus erhellet ſchon wie weiter zu verfahren iſt, und daſs die letzte Complexion eine umgekehrt gutgeordnete der letzten *m* Elemente des Zeigers ſeyn wird.

Beweis.

Daſs in keiner der gefundenen Mtionen ein Element öfter als *ein*mal vorkommen kann, fällt hinreichend in die Augen; es fragt ſich aber ob nicht bei der Beobachtung der Regeln der Auflöſung eine oder mehrere Complexionen übergangen werden? Dieſs iſt aus dem Grunde nicht möglich weil der Mangel irgend einer Mtion das Fehlen der zuerſt hingeſchriebenen bedingt. Denn geſetzt es wäre von der vierten Klaſſe für den Zeiger $\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g\end{pmatrix}$ die Rede und man wollte behaupten daſs die Auflöſung nicht die Complexion *badge* gäbe, ſo müſste man annehmen, daſs man durch ſie auch nicht die Complexionen *abdge*, *abcge*, *abcfe*, *abcef*, *abcdf* und *abcde* erhielte, weil *abcdf* nach 2) aus *abcde* entſteht, weil ferner nach 3) *abcef* aus *abcdf*, *abcfe* aus *abcef*, *abcge* aus *abcfe* entſpringt, weil nach 4) *abdge* aus *abcge* und endlich weil *badge* nach 6) aus *abdge* abgeleitet wird.

Beiſpiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$

D`

abcd	bacd	cabd	dabc	eabc
abce	bace	cade	dace	eacd
abdc	badc	cadb	dacb	cacb
abde	bade	cade	dace	eacd
abec	baec	caeb	daeb	eadb
abed	baed	caed	dacc	eadc
acbd	bcad	cbad	dbac	ebac
acbe	bcae	cbae	dbae	ebad
acdb	bcda	cbda	dbca	ebca
acde	bcde	cbde	dbce	ebcd
aceb	bcea	cbea	dbea	ebda
aced	bced	cbed	dbec	ebdc
adbc	bdac	cdab	dcab	ecab
adbe	bdae	cdae	dcac	ecad
adcb	bdca	cdba	dcba	ecba
adcc	bdce	cdbe	dcbe	ecbd
adeb	bdea	cdea	dcea	ecda
adec	bdcc	cdeb	dccb	ecdb
aebc	beac	ceab	deab	edab
aebd	bead	cead	deac	edac
aecb	beca	ceba	deba	edba
aecd	becd	cebd	debc	edbc
aedb	beda	ceda	deca	edca
aedc	bedc	cedb	decb	edcb

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe das *m*te und die folgenden Elemente des Zeigers unter einander.

2) Vor dieſe ſetze man das m—1te Element des Zeigers; hierauf ſubſtituire man für das erſte Element der jetzt gefundenen Binionen das nächſtfolgende und für ihr zweites, wenn es mit dem ſubſtituirten identiſch iſt,

das

das nächstvorhergehende des Zeigers. Dies giebt Binionen der Ordnung des mten Elements des Zeigers. Aus diesen mache man auf die nämliche Weise Binionen der Ordnung des m+1ten Elements, hieraus wieder die Binionen der Ordnung des m+2ten Elements und fahre so fort bis man die Binionen der Ordnung des letzten Elements des Zeigers hat.

3) Sämmtlichen Binionen schreibe man das m--2te Element des Zeigers vor, so erhält man Ternionen der Ordnung dieses m—2ten Elements. Hieraus leite man die Ternionen der Ordnung des m—1ten Elements, aus diesen wieder die Ternionen der Ordnung des mten Elements des Zeigers her u. s. w. und zwar nach folgender allgemeinen Vorschrift:

Um aus den Complexionen einer gewissen Ordnung, die Complexionen der nächsthöhern Ordnung zu erhalten substitire man für ihr erstes Element das zunächstfolgende des Zeigers und wenn eines ihrer übrigen Elemente das eben genannte substituirte des Zeigers seyn sollte, so setze man für jenes eine Element der Complexion dasjenige, welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht.

4) Vor alle durch 3) gefundene Ternionen schreibe man das m—3te Element des Zeigers und leite aus den hierdurch entstandenen Quaternionen der Ordnung des genannten m—3ten Elements, wieder nach der allgemeinen Vorschrift von 3), die Quaternionen der höhern Ordnungen her.

u. s. w.

Beweis.

Es bedarf keines Beweises, dass in den Binionen, Ternionen u. s. w. Mtionen, welche die Auflösung giebt keine Wiederholungen vorkommen, weil dieses deutlich genug in die in Augen fällt; es braucht daher nur bewiesen

ſen zu werden, daſs man durch die Auflöſung auch alle Variations - mtionen ohne Wiederholungen bekömmt. Am kürzeſten läſst ſich dieſes darthun, wenn man dabei einen ſpeciellen Fall zum Grunde legt. Es ſoll daher unterſucht werden ob die Auflöſung für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ a, & b, & c, & d, & e \end{pmatrix}$ alle Variationsquaternionen ohne Wiederholungen darſtellt.

α) Die zweite Vorſchrift giebt Binionen der Elemente c, d, e und zwar alle hier mögliche, weil ſie überhaupt bei *m* Elementen, für jede Ordnung, m—1 Binionen ohne Wiederholungen darſtellt und mehr als m—1 von jeder Ordnung nicht gedacht werden können.

β) Durch die dritte Vorſchrift der Auflöſung entſtehn für die Elemente b, c, d, e ſo viele Ternionen der Ordnung b der Ordnung c u. ſ. w. als es für die Elemente c, d, e Binionen ohne Wiederholungen giebt. Die dritte Vorſchrift giebt daher alle Variationsternionen ohne Wiederholungen für die Elemente b, c, d, e, weil es nur ſo viele dieſer Ternionen von der Ordnung b geben kann als Variationsbinionen ohne Wiederholungen für die Elemente c, d, e denkbar ſind und ſich eben ſo viele und auch nicht mehrere Ternionen der Ordnung c, der Ordnung d u. ſ. w. denken laſſen, als Ternionen der Ordnung b ſtatt finden.

γ) Durch die vierte Vorſchrift der Auflöſung werden für die Elemente a, b, c, d, e ſo viele Quaternionen von der Ordnung a, der Ordnung b u. ſ. f. gefunden als für die Elemente b, c, d, e Ternionen ohne Wiederholungen möglich ſind. Aus dieſem Grunde bekömmt man auch durch die vierte Vorſchrift alle geſuchte Quaternionen, denn hiervon kann es nur ſo viele von der Ordnung a, der Ordnung b u. ſ. f. geben als es für die Elemente b, c, d, e Ternionen ohne Wiederholungen giebt.

Beispiele.

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{a,\ b,\ c,\ d,\ e}$$

a b c	1 2 3
a b d	1 2 4
a b e	1 2 5
a c b	1 3 2
a c d	1 3 4
a c e	1 3 5
a d b	1 4 2
C̀ a d c	C̀ 1 4 3
a d e	1 4 5
a e b	1 5 2
a e c	1 5 3
a e d	1 5 4
b a c	2 1 3
b a d	2 1 4
b a e	2 1 5
b c a	2 3 1
b c d	2 3 4
b c e	2 3 5
u. s. w.	u. s. w.

Anmerkung.

Das nämliche welches in Rücksicht auf die beiden Auflösungen der Aufgabe des §. 28 in der Anmerkung im allgemeinen gesagt ist, gehört auch hierher.

§. 47.

Lehrsatz

Die Anzahl der Complexionen der mten Klasse der Variationen ohne Wiederholungen ist für r verschiedene Elemente gleich

$$r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \,.\,.\,.\,.\, \big(r-(m-1)\big).$$

Beweis.

Die mte Variationsklasse enthält alle Combinationsmtionen nebst allen möglichen Formen derselben, folglich

lich muſs ſie auch ſo viele Complexionen beſitzen als die Summe aller Verſetzungszahlen der einzelnen Complexionen der mten Combinationsklaſſe ausmacht. Für eine jede Mtion in welcher keine Wiederholungen vorkommen iſt aber die Verſetzungszahl gleich $1 . 2 . 3 . 4 \ldots m$ (§. 16) und bei r verſchiedenen Elementen beſitzt die mte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen

$$\frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \ldots (r-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots m}$$ Mtionen, folglich iſt auch bei r verſchiedenen Elementen die gedachte Summe aller Variations - mtionen ohne Wiederholungen

gleich $$\frac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \ldots (r-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots m} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m =$$

$$r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \,.\, r-3 \ldots (r-(m-1)).$$

γ. Von den Variationen zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen.

§. 48.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 & \ldots & \nu \\ a, & b, & c, & d & \ldots & n \end{pmatrix}$ alle Variationen mit Wiederholungen zur Summe ν geſucht.

1.

Arithmetiſch - combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe das Element ν hin, ſo hat man $\overset{\nu}{A}$.

2) Hieraus leite man $\overset{\nu}{B}$ her, aus dieſer Klaſſe folgere man wieder $\overset{\nu}{C}$ u. ſ. w. wie nach §. 9 aus der einzifrigen Zahl ν ſucceſſiv die zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen u. ſ. w. die ν zifrigen Zahlen zur Summe ν abgeleitet werden.

Die

Die Subſtitution der Buchſtaben für die mit ihnen correſpondirenden Elemente der gefundenen Zahlencomplexionen giebt die geſuchten Buchſtabencomplexionen.

Beweis.

Durch die Vorſchrift der Auflöſung in §. 9 erhält man alle mögliche Zahlen deren Ziffernſumme gleich ν iſt. Eine jede dieſer Zahlen kann aber als eine Variation angeſehn werden und es läſst ſich keine Variation zur Summe ν denken, die ſich nicht unter dieſen Zahlen befände, alſo macht die einzifrige Zahl die Klaſſe $^{\nu}A$, die zweizifrigen machen die Klaſſe $^{\nu}B$, die dreizifrigen die Klaſſe $^{\nu}C$ aus u. ſ. w. und folglich muſs auch, da mit einer jeden Buchſtabenvariation eine Zahlenvariation correſpondirt, die gedachte Subſtitution alle Buchſtabenvariationen geben.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \end{pmatrix}$$

^6A	6	f
^6B	15	ae
	24	bd
	33	cc
	42	db
	51	ea
^6C	114	aad
	123	abc
	132	acb
	141	ada
	213	bac
	222	bbb
	231	bca
	312	cab
	321	cba
	411	daa
^6D	1113	aaac
	1122	aabb
	1131	aaca
	1212	abab
	1221	abba
	1311	acaa
	2112	baab
	2121	baba
	2211	bbaa
	3111	caaa
^6E	11112	aaaab
	11121	aaaba
	11211	aabaa
	12111	abaaa
	21111	baaaa
^6F	111111	aaaaaa

2)

a) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze das Element ν als erste Klasse hin.

2) Man schreibe rechts neben das erste Element des Zeigers das vorletzte desselben; dies giebt die erste Complexion der zweiten Klasse. Aus dieser Complexion leite man die zweite Binion her indem man für ihr erstes Element das nächstfolgende und für ihr letztes das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt und lasse nach diesem Ableitungsgesetze wieder aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Binion entstehn u. s. w. Die Binion ist die letzte deren letztes Element das erste des Zeigers ist.

3) Aus der zweiten Klasse leite man die dritte, aus der dritten die vierte Klasse u. s. f. nach folgenden allgemeinen Vorschriften ab:

α) Man setze vor alle Complexionen, welche sich nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers endigen, dieses erste Element *a* vor und substituire für ihr Endelement das nächstvorhergehende des Zeigers, so hat man die Complexionen der Ordnung *a*.

β) Man verwandele das erste Element derjenigen dieser Complexionen, welche nicht a zum Endelemente haben, in das nächstfolgende und schreibe für ihr letztes Element das nächstvorhergehende des Zeigers. Dies giebt Complexionen der Ordnung *b*.

γ) Auf die nämliche Weise, wie in β) vorgeschrieben ist, leite man aus diesen Complexionen der Ordnung *b* die der Ordnung *c* und so überhaupt aus den Complexionen der Ordnung des m—1ten Elements die Complexionen der Ordnung des mten Elements ab.

Beweis.

Dass die Complexionen zu welchen man durch die Auflösung kömmt die Summe ν haben ist einleuchtend, dass

dafs man aber, wenn man die Vorschriften der Auflöfung beobachtet, auch keine Complexionen übergeht, läfst fich fo zeigen;

1) Es ift nur *eine* Union möglich, folglich erhält man alle Unionen, weil nach der erften Vorfchrift der Auflöfung zuerft ν hingefchrieben wird.

2) Es wird keine Binion übergangen, denn es läfst fich hier nur eine denken, die fich mit a anfängt und von diefer geht man aus und eine jede andere, welche nicht a zum Anfangselemente hat, läfst fich dadurch, dafs man fucceffiv ihr erftes Element in das nächftvorhergehende und ihr letztes in das nächftfolgende des Zeigers verwandelt auf die gedachte Binion der Ordnung a reduciren, fo dafs alfo eine jede Binion zur Summe ν, welche die Ordnung a nicht hat, durch die zweite Regel der Auflöfung aus der Binion der Ordnung a erhalten wird.

3) Es kann aber auch keine Ternion, Quaternion u. f. w, übergangen werden. Denn gefetzt man denkt fich unter einer Mtion eine Complexion einer höhern Klaffe als die zweite ift und nimmt an dafs eine Mtion fehlt die fich nicht mit a anfängt, fo mufs man wegen der zweiten und dritten Vorfchrift der dritten Regel der Auflöfung auch nothwendig annehmen, dafs auch die Mtion fehlt, welche aus ihr gemacht wird wenn man für ihr erftes Element das nächftvorhergehende und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fchreibt. Hieraus folgt offenbar, dafs der Mangel einer Mtion, die p zum Anfangselemente hat, den Mangel einer jeden Mtion bedingt, die fich mit einem Elemente anfängt das im Zeiger früher als p vorkömmt und dafs er folglich auch das Fehlen einer Mtion vorausfetzt deren erftes Element das Element a ift. Ift aber eine Mtion der Ordnung a nicht vorhanden, fo mufs auch die M—1tion übergangen feyn, die aus diefer Mtion der Ordnung a entfteht, wenn man ihr erftes Element a wegläfst und für ihr Endelement das

 nächft-

nächstfolgende des Zeigers substituirt. (*Aufl.* 3, α,). Es erfordert also der Mangel einer jeden Mtion jedesmal den Mangel einer M—ition oder welches einerlei ist, das Fehlen einer Complexion irgend einer höhern Klasse als der zweiten, bedingt nothwendig, dafs durch die Auflösung auch eine Complexion der nächstvorhergehenden Klasse und daher auch eine der zweiten Klasse übergangen wird.

Hierhergehörige Beispiele sind die zur ersten Auflösung gegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die erste Anmerkung zur zweiten Auflösung der Aufgabe des §. 29 ist auch auf die jetzt gegebene Auflösung anzuwenden, wie man aus der hierunter stehenden Figur deutlich sieht.

	5	
1	4	^4A
	2 3	
	3 2	
	4 1	
1	1 3	
1	2 2	^4B
1	3 1	
	2 1 2	
	2 2 1	
	3 1 1	
1	1 1 2	
1	1 2 1	^4C
1	2 1 1	
	2 1 1 1	
1	1 1 1 1	^4D

2. *An-*

2. *Anmerkung.*

Das nämliche was in der zweiten Anmerkung pag. 91 gesagt ist, mufs auch hier erinnert werden.

3)

β. *Rein combinatorische Auflösung.*

Man schreibe das erste Element des Zeigers hin und leite hieraus die Complexionen zur Summe 2, aus diesen wieder die Complexionen zur Summe 3 und so ferner aus den Complexionen zur Summe $\nu - 1$ die zur Summe ν her und zwar auf folgende Weise:

1) Allen Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe setze man das erste Element des Zeigers vor.

2) Man substituire für das erste Element jeder Complexion zur nächstvorhergehenden Summe, das dem Zeiger nach nächstfolgende Element und schreibe die Complexionen die man hierdurch erhält, in der Ordnung wie sie gefunden sind, unter die welche man durch die erste Vorschrift bekommen hat.

Beweis.

Ist das Anfangselement einer Complexion zur Summe m das erste Element des Zeigers, so wird sie wenn man ihr das erste Element nimmt, eine Complexion zur Summe $m-1$ aus der sie vermittelst der ersten Vorschrift der Auflösung entsteht. Fängt sich eine Complexion zur Summe m nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers an, so macht man sie, wenn man für ihr erstes Element das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt, zu einer Complexion zur Summe $m-1$ aus der man sie nach der zweiten Vorschrift der Auflösung erhält.

Hieraus erhellet, dafs die erste und zweite Vorschrift der Auflösung alle Complexionen zur Summe m geben,

 wenn

wenn man alle Complexionen zur Summe m—1 hat. Es giebt aber die Auflösung die Complexionen zur Summe 1 und zur Summe 2 gewiſs, folglich auch alle Complexionen zur Summe 3, zur Summe 4 u. ſ. f. zur Summe *v*.

Beiſpiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f}$

	⁶𝔍	⁶𝔍
⁶𝔄	a a a a a a	1 1 1 1 1 1
	a a a a b	1 1 1 1 2
	a a a b a	1 1 1 2 1
	a a a c	1 1 1 3
	a a b a a	1 1 2 1 1
	a a b b	1 1 2 2
	a a c a	1 1 3 1
	a a d	1 1 4
	a b a a a	1 2 1 1 1
	a b a b	1 2 1 2
	a b b a	1 2 2 1
	a b c	1 2 3
	a c a a	1 3 1 1
	a c b	1 3 2
	a d a	1 4 1
	a e	1 5
⁶𝔅	b a a a a	2 1 1 1 1
	b a a b	2 1 1 2
	b a b a	2 1 2 1
	b a c	2 1 3
	b b a a	2 2 1 1
	b b b	2 2 2
	b c a	2 3 1
	b d	2 4
⁶ℭ	c a a a	3 1 1 1
	c a b	3 1 2
	c b a	3 2 1
	c c	3 3
⁶𝔇	d a a	4 1 1 1
	d b	4 2
⁶𝔈	e a	5 1
⁶𝔉	f	6

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung giebt lexicographiſche Involutionen (§. 29, β. *Rein combinatoriſche Aufl. 1. Anmerk.*). Das Zeichen für dieſe Involutionen iſt $\mathfrak{J}$ und zur Bezeichnung des Inbegriffs ihrer Complexionen der Ordnung *a*, der Ordnung *b*, der Ordnung *c* u. ſ. w. bedient man ſich der Buchſtaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. ſ. f.

2. *Anmerkung.*

Das nämliche was in der zweiten Anmerkung pag. 94 von der Klaſſen- und lexicographiſchen Involution geſagt iſt, die ſich auf die Combinationen zu beſtimmten Summen beziehn, gilt auch für dieſe beiden Involutionen, wenn ſie Variationen zu beſtimmten Summen darſtellen.

1. *Zuſatz.*

Es iſt $\overset{v}{J}\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots\end{matrix}\right) = \overset{v}{\mathfrak{J}}\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots\end{matrix}\right)$

2. *Zuſatz.*

Es iſt $\overset{6}{\mathfrak{J}}\left(\begin{matrix}1, 2, 3, \ldots 6 \\ a, b, c, \ldots g\end{matrix}\right) = \overset{6}{\mathfrak{A}} + \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}} + \overset{6}{\mathfrak{D}} + \overset{6}{\mathfrak{E}} + \overset{6}{\mathfrak{F}} + \overset{6}{\mathfrak{G}}.$

Hieraus erhellet ſchon welche Gleichung für die Summe *n* überhaupt ſtatt findet.

* * *

Solche Zuſätze als der 3te bis 7te Zuſatz des §. 29 für die lexicographiſchen Combinationsinvolutionen ſind,

 fallen

fallen für die lexicographischen Variationsinvolutionen weg.

Darstellung einzelner Klassen der Variationen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

§. 49.

Aufgabe.

Es soll die *m*te Klasse zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ \ldots}$ dargestellt werden.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man setze neben m—1 Einsen rechter Hand das Supplement zur Summe *n*, so hat man die erste Complexion der gesuchten Klasse.

2) Aus dieser leite man die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion her u. s. w. wie man nach der Vorschrift des 12ten und 13ten Satzes des §. 6 aus einer Zahl die nächstgröſsere ableitet.

Substituirt man in den gefundenen Zahlencomplexionen für die Zahlenelemente die mit ihnen, dem Zeiger nach, correspondirenden Buchstaben, so bekömmt man die Buchstabencomplexionen der verlangten Klasse.

Beweis.

Die Auflösung schreibt vor, daſs man zuerst die Complexion hinsetzen soll, welche als Zahl betrachtet die geringste *m*zifrige Zahl zur Summe *n* ist und daſs man aus dieser so viele andere Complexionen herleiten soll, als nach den Vorschriften des 12ten und 13ten Satzes des §. 6, daraus abgeleitet werden können. Diese Vorschriften führen aber jedesmal von einer *m*zifrigen Zahl der Summe *n* zur nächstgröſsern *m*zifrigen Zahl der nämlichen

chen Summe, alſo übergeht man gewiſs keine der geſuchten Zahlencomplexionen, wenn eine jede als eine *m*zifrige Zahl zur Summe *n* angeſehen werden kann. Dies iſt aber der Fall, folglich giebt die Auflöſung alle geſuchte Zahlencomplexionen und daher muſs auch die Subſtitution der Buchſtaben, alle Buchſtabencomplexionen geben.

Beiſpiel.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \ldots \end{pmatrix}$$

^{10}D

1117	1441	2341	3511
1126	1513	2413	4114
1135	1522	2422	4123
1144	1531	2431	4132
1153	1612	2512	4141
1162	1621	2521	4213
1171	1711	2611	4222
1216	2116	3115	4231
1225	2125	3124	4312
1234	2134	3133	4321
1243	2143	3142	4411
1252	2152	3151	5113
1261	2161	3214	5122
1315	2215	3223	5131
1324	2224	3232	5212
1333	2233	3241	5221
1342	2242	3313	5311
1351	2251	3322	6112
1414	2314	3331	6121
1423	2323	3412	6211
1432	2332	3421	7111

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) In dem Zeiger durchlaufe man von dem *n*ten Elemente an, von der Rechten nach der Linken, *m* Elemente

mente und schreibe des *m*te Element, auf welches man hierbei kömmt, als Union hin.

2) Hieraus leite man die Binionen, aus den Binionen die Ternionen, aus diesen wieder, die Quaternionen u. s. f. aus den M—1tionen die Mtionen ab und zwar nach folgenden allgemeinen Vorschriften.

α) Man setze allen schon gefundenen Complexionen der nächstvorhergehenden Klasse zuerst *a* vor, dies giebt für die nächstfolgende Klasse die Complexionen der Ordnung *a*.

β) Man verwandele das erste Element der Complexionen, die α) gegeben hat, in das nächstfolgende des Zeigers und setze für ihr letztes Element das nächstvorhergehende des Zeigers, übergehe aber bei dieser Operation diejenigen Complexionen, welche sich mit *a* endigen. Aus den hierdurch gefundenen Complexionen der Ordnung *b*, leite man wieder auf die nämliche Weise die der Ordnung *c* her u. s. w. und setze dieses Verfahren überhaupt so lange als möglich fort.

Beweis.

1) Eine jede gegebene Ntion zur Summe *p*, die nicht die Ordnung *a* hat, wird dadurch, dafs man successiv für ihr erstes Element das nächstvorhergehende und für ihr letztes das nächstfolgende des Zeigers substituirt auf eine Ntion der nämlichen Summe reducirt, welche die Ordnung *a* hat. Für jede Ntion zur Summe *p*, wenn sie nich die Ordnung *a* besitzt giebt es also eine Ntion der Ordnung *a* zur Summe *p*, aus welcher sie abgeleitet wird, wenn man successiv für das erste Element derselben das nächstfolgende und für das letzte das nächstvorhergehende des Zeigers schreibt. (*Aufl.* β.).

2) Wird

2) Wird einer N tion der Ordnung a zur Summe p das erste Element genommen, so wird aus ihr eine N—1tion zur Summe p—1, aus welcher sie durch ein bloſses Vorschreiben des a gemacht werden kann. (*Anfl.* α.)

Aus diesen beiden Sätzen folgt offenbar, daſs die Auflösung alle Ntionen zu einer gewissen Summe giebt, wenn sie alle N—1tionen zur nächstvorhergehenden Summe darstellt. Man erhält aber durch die Auflösung die hier einzig möglichen Union zur Summe n—(m—1) gewiſs, folglich bekömmt man durch sie auch alle Binionen zur Summe n—(m—1) + 1 und deswegen wieder alle Ternionen zur Summe n—(m—1) + 2 und aus diesem Grunde wieder, alle Quaternionen zur Summe n—(m—1) + 3 u. s. f. so daſs man durch die Auflösung auch gewiſs alle Mtionen zur Summe n—(m—1) + m—1, oder welches einerlei ist, daſs man alle Mtionen zur Summe n bekömmt.

Be-

Beispiele.

$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ ..}{a,\ b,\ c,\ d\ ..}$

^8E	^8E
1 1 1 1 4	a a a a d
1 1 1 2 3	a a a b c
1 1 1 3 2	a a a c b
1 1 1 4 1	a a a d a
1 1 2 1 3	a a b a c
1 1 2 2 2	a a b b b
1 1 2 3 1	a a b c a
1 1 3 1 2	a a c a b
1 1 3 2 1	a a c b a
1 1 4 1 1	a a d a a
1 2 1 1 3	a b a a c
1 2 1 2 2	a b a b b
1 2 1 3 1	a b a c a
1 2 2 1 2	a b b a b
1 2 2 2 1	a b b b a
1 2 3 1 1	a b c a a
1 3 1 1 2	a c a a b
1 3 1 2 1	a c a b a
1 3 2 1 1	a c b a a
1 4 1 1 1	a d a a a
2 1 1 1 3	b a a a c
2 1 1 2 2	b a a b b
2 1 1 3 1	b a a c a
2 1 2 1 2	b a b a b
2 1 2 2 1	b a b b a
2 1 3 1 1	b a c a a
2 2 1 1 2	b b a a b
2 2 1 2 1	b b a b a
2 2 2 1 1	b b b a a
2 3 1 1 1	b c a a a
3 1 1 1 2	c a a a b
3 1 1 2 1	c a a b a
3 1 2 1 1	c a b a a
3 2 1 1 1	c b a a a
4 1 1 1 1	d a a a a

An-

Anmerkung.

Die Auflösung giebt Involutionen, wie so wohl aus dem ganzen Gange derselben als auch aus den beiden gegebenen Beispielen deutlich erhellet.

§. 50. *a*).

Aufgabe.

Es wird die erste, oder als Zahl betrachtet, die geringste Complexion der mten Variationsklasse zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\ .\ .\ \varrho}{a,\ b,\ c\ .\ .\ r}$ gesucht, in welchem zwar $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ gedacht wird.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

Es ist einleuchtend, dass die jetzige Aufgabe und die des §. 32 die Darstellung einer und derselben Complexion verlangen, folglich ist die Auflösung der Aufgabe des §. 32 auch zugleich die Auflösung der jetzigen Aufgabe.

§. 51.

Aufgabe.

Es wird $^{n}\mathfrak{M}$ gesucht und zwar unter der Bedingung, dass $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ ist. $\binom{1,\ 2,\ 3\ .\ .\ \varrho}{a,\ b,\ c\ .\ .\ r}$

Arith-

a) Um diese und die folgende Aufgabe zu verstehn, hat man nur nöthig die Anmerkung des §. 31 auf die Variationen anzuwenden. Es muss aber bei dieser Anwendung das in der Anmerkung gegebene Beispiel für $^{15}\mathrm{E}$ übergangen und statt des darinn genannten §. 30 der §. 49 gedacht werden.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung. a)

Man suche nach §. 51 die erste Complexion, sehe diese als eine Zahl an und leite hieraus die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion her u. s. w. indem man immer unter der Bedingung, dass ϱ die höchste Zifer ist, von der zuletzt gefundenen mzifrigen Zahl zur nächstgröfsern mzifrigen Zahl der Summe n nach folgenden allgemeinen Regeln fortgeht.

1) Man sucht in der Zahl, von der letzten Zifer an, von der Rechten nach der Linken die erste Zifer auf, welche gröfser ist als 1.

2) Hat man diese Zifer gefunden, so sucht man unter denen die ihr nach der Linken hin folgen, die erste Zifer auf welche kleiner als ϱ ist und vergröfsert diese um 1.

3) Man setzt für die Zifern, welche der vergröfserten, nach der Rechten hin folgen, bloss Einsen, vertheilt aber unter diese, von der letzten an, so das Supplement zur Summe n, dass man einer jeden so viel davon giebt als ihr nur immer gegeben werden kann, ohne sie gröfser als ϱ zu machen.

Beweis.

Die erste Complexion, von der man hier ausgeht ist als Zahl betrachtet unter allen gesuchten Complexionen die kleinste. Da sich nun eine jede der verlangten Zahlencomplexionen als eine Zahl ansehn läfst, so ist klar, dass die Auflösung alle Zahlencomplexionen giebt, wenn ihre drei

a) Für diese Auflösung ist in §. 6. kein arithmetischer Satz angegeben, woraus sie unmittelbar genommen werden könnte; der 13te Satz ist nur da anzuwenden wo der Zeiger unbegränzt ist.

drei allgemeinen Regeln ſo von der zuerſt aufgeſtellten Complexion zu den übrigen führen, daſs man allemal von einer Zahl zu der kömmt, die von ihr unter den Bedingungen der Aufgabe die nächſtgröſsere iſt. Daſs dies aber der Fall ſey, fällt bei einer genauen Betrachtung der drei allgemeinen Regeln der Auflöſung gleich in die Augen:

α) Nach der erſten und zweiten Regel ſubſtituirt man um die Zahl zu vergröſsern für diejenige Zifer die nächſtgröſsere, die unter den Zifern die geringſte Ordnung hat, welche kleiner als ϱ ſind und auf welche nach der Rechten hin wenigſtens eine Zifer folgt die gröſser als 1 iſt; von den Zifern alſo, die bei den Bedingungen der Aufgabe vergröſsert werden dürfen, nimmt man dazu die Zifer, welche die geringſte Ordnung hat, denn die zuvergröſsernde Zifer darf der Aufgabe nach noch nicht gleich ϱ ſeyn und wegen §. 6, 9. Satz muſs auf ſie eine Zifer wenigſtens folgen die gröſser als die geringſte Zifer 1 iſt.

β) Nach der dritten Regel läſst man auf die um 1 vergröſserte Zifer erſt Einſen folgen und ſupplirt dann die gegebene Summe ſo, daſs die Zahl durch dies Suppliren um ſo wenig wächſt als hierbei nur immer möglich iſt. Wenn alſo nach der erſten und zweiten Regel der Auflöſung eine Zifer vergröſsert iſt, ſo nimmt man nach der dritten Regel mit den übrigen Zifern die Veränderung vor, daſs dieſe Vergröſserung der einen Zifer auf das Wachſen der Zahl überhaupt ſo wenig Einfluſs hat, als ſie nur immer darauf haben kann. (§. 6, 6 Satz, Anmerk. zum 13. Satze).

Vergröſsert man aber in einer gegebenen Zahl diejenige Zifer um 1, welche unter denen die vergröſsert werden dürfen die geringſte Ordnung hat und nimmt mit den übrigen Zifern eine ſolche Veränderung vor, daſs

durch

durch gedachte Vergrößerung die Zahl so wenig als möglich wächst, so erhält man auch gewiss für die Bedingungen unter welchen die Vergrößerung vorgenommen ist, die nächstgrößere Zahl.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$$

$${}^{15}E$$

12444	24342	34143	42432
13344	24414	34224	42441
13434	24423	34233	43134
13443	24432	34242	43143
14244	24441	34314	43224
14334	31344	34323	43233
14343	31434	34332	43242
14424	31443	34341	43314
14433	32244	34413	43323
14442	32334	34422	43332
21444	32343	34431	43341
22344	32424	41244	43413
22434	32433	41334	43422
22443	32442	41343	43431
23244	33144	41424	44124
23334	33234	41433	44133
23343	33243	41442	44142
23424	33324	42144	44214
23433	33333	42234	44223
23442	33342	42243	44232
24144	33414	42324	44241
24234	33423	42333	44313
24243	33432	42342	44322
24324	33441	42414	44331
24333	34134	42423	44412
			44421

§. 52.

Anmerkung.

Wenn die Zahlen 1, 2, 3, . . n, zur Summe n mit Wiederholungen variirt werden, so ist die Anzahl der Com-

Complexionen der ersten Klasse gleich 1, der zweiten Klasse gleich $\frac{n-1}{1}$, der dritten Klasse gleich $\frac{n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2}$, der vierten Klasse gleich $\frac{n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, der fünften Klasse gleich $\frac{n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ u. s. w. so dass die Zahl, welche die Anzahl der Complexionen der mten Klasse bestimmt, mit dem mten Binomialcoefficienten der $n-1$ten Dignität einerlei ist.

δ. Von den Variationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen.

§. 53.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\binom{1,\,2,\,3,\,4\,\ldots\,\nu}{a,\,b,\,c,\,d\,\ldots\,n}$ alle Variationen ohne Wiederholungen zur Summe ν darzustellen.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze ν hin, so hat man $^{\nu}\mathfrak{A}$.

2) Man leite hieraus nach §. 35 die gutgeordneten Binionen her und schreibe unter diese die Versetzungen derselben, so hat man $^{\nu}\mathfrak{B}'$.

3) Aus den gutgeordneten Binionen folgere man nach §. 35 die gutgeordneten Ternionen und setze unter diese wieder die Versetzungen derselben, so bekömmt man die dritte Klasse $^{\nu}\mathfrak{C}'$.

4) Nach der nämlichen Vorschrift, welche für die Ableitung der dritten Klasse aus der zweiten gegeben ist,

 lasse

lasse man wieder die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten entstehn u. s. w.

Beweis.

Man erhält durch die Auflösung offenbar alle gutgeordnete und schlechtgeordnete Complexionen die für die gegebene Aufgabe möglich sind; die verlangten Variationen sind aber nichts anders als alle gutgeordnete und schlechtgeordnete Complexionen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, folglich thut auch die Auflösung der Aufgabe völlig Genüge.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\\ a, b, c, d, e, f, g, h\end{pmatrix}$$

8	$^{8}A'$	h	$^{8}A'$
17		ag	
26		bf	
35		ce	
71	$^{8}B'$	ga	$^{8}B'$
62		fb	
53		ec	
125		abe	
134		acd	
152		aeb	
215		bae	
251	$^{8}C'$	bea	$^{8}C'$
512		fab	
521		fba	
143		adc	
314		cad	
341		cda	
413		dac	
431		dca	

Anmerkung.

Bisher haben die Auflösungen wenn sie das Verlangte der Aufgaben in Klassen darstellten, gutgeordnete Klassen ge-

gegeben, die Auflösung der jetzigen Aufgabe hingegen giebt schlechtgeordnete Klassen. Wird also mit der jetzigen Aufgabe noch ausdrücklich die Bedingung verbunden, dass die Klassen gutgeordnete seyn sollen, so muss man die durch die Auflösung gefundenen Complexionen wenn sie Zahlencomplexionen sind, so ordnen, dass sie wie wachsende Zahlen, und wenn sie Buchstabencomplexionen sind, dass sie lexicographisch fortlaufen. *a*).

Darstellung einzelner Klassen der Variationen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen.

§. 54.

Aufgabe.

Es wird die mte Klasse zur Summe ν für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \nu \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \ldots n \end{pmatrix}$ gesucht.

Auflösung.

Man suche nach der Auflösung der Aufgabe des §. 36 die gutgeordneten Complexionen auf und schreibe unter diese die Versetzungen derselben.

M 2 Be-

a) Wenn man die Variationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen durch ein solches Verfahren finden will, welches bei andern Aufgaben die Klassen gutgeordnet gegeben hat, so übergeht man jederzeit einige Complexionen, nämlich diejenigen welche bei jenem Verfahren aus Complexionen mit Wiederholungen entstehn würden. So z. B. erhält man bei Beobachtung der Methode, welche sonst bei Klasseninvolutionen gebraucht wird, für die Summe 8 in der dritten Klasse die Complexion 143 nicht, weil sie aus der Binion 44 entsteht, wenn man dieser das Element 1 vorsetzt und ihr letztes Element in das nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt.

Beweis.

Für die Richtigkeit dieser Auflösung gilt der nämliche Beweis, der für die Auflösung der Aufgabe des vorhergehenden Paragraphs gegeben ist.

Beispiele.

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g}$$

	1 2 7	a b g	
	1 3 6	a c f	
	1 4 5	a d e	
	2 3 5	b c e	
	1 7 2	a g b	
	2 1 7	b a g	
	2 7 1	b g a	
	7 1 2	g a b	
	7 2 1	g b a	
$^{10}C'$	1 6 3	a f c	$^{10}C'$
	3 1 6	c a f	
	3 6 1	c f a	
	6 1 3	f a c	
	6 3 1	f c a	
	1 5 4	a e d	
	4 1 5	d a e	
	4 5 1	d e a	
	5 1 4	e a d	
	5 4 1	e d a	
	2 5 3	b e c	
	3 2 5	c b e	
	3 5 2	e c b	
	5 2 3	e b c	
	5 3 2	e c b	

Anmerkung.

Das allgemeine der Anmerkung und der dazugehörigen Note des §. 53 gehört auch hierher.

§. 55.

Anmerkung.

Um zu bestimmen, wie viele Variationen ohne Wiederholungen die mte Klasse zur Summe n enthält, hat man

man nur nöthig zu berechnen wie viele Combinationen ohne Wiederholungen die mte Combinationsklaſſe beſitzt (§. 37) und die gefundene Zahl durch die Verſetzungszahl 1 . 2 . 3 . 4 . . . m zu multipliciren.

Von dem Variiren mehrerer Reihen.

§. 56.

Erklärung.

In Rückſicht auf die Sätze welche in dieſem Paragraphe erklärt werden müſſen, wird auf §. 38 verwieſen. Man hat nämlich die hier aufzuſtellenden Sätze, wenn man in §. 38 ſtatt Combination, Variation lieſet und für die Combinationsklaſſenzeichen die Variationsklaſſenzeichen ſetzt.

Variationen überhaupt.

§. 57.

1. *Aufgabe.*

Für den hierunterſtehenden Zeiger die Variationen mit Wiederholungen zu finden.

$$\left[\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3 & \\ a & b & c & = p \\ A & B & C & = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & = r \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & = s \end{array}\right]$$

Auflösungen.

(1

a	b	c	
			$'A^{p}$
Aa	Ab	Ac	
Ba	Bb	Bc	$'B^{qp}$
Ca	Cb	Cc	
𝔞Aa	𝔞Ab	𝔞Ac	
𝔞Ba	𝔞Bb	𝔞Bc	
𝔞Ca	𝔞Cb	𝔞Cc	
𝔟Aa	𝔟Ab	𝔟Ac	
𝔟Ba	𝔟Bb	𝔟Bc	$'C^{rqp}$
𝔟Ca	𝔟Cb	𝔟Cc	
𝔠Aa	𝔠Ab	𝔠Ac	
𝔠Ba	𝔠Bb	𝔠Bc	
𝔠Ca	𝔠Cb	𝔠Cc	
𝔄𝔞Aa	𝔄𝔞Ab	𝔄𝔞Ac	
〃	〃	〃	
𝔄𝔠Ca	𝔄𝔠Cb	𝔄𝔠Cc	
𝔅𝔞Aa	𝔅𝔞Ab	𝔅𝔞Ac	$'D^{srqp}$
〃	〃	〃	
𝔅𝔠Ca	𝔅𝔠Cb	𝔅𝔠Cc	
ℭ𝔞Aa	ℭ𝔞Ab	ℭ𝔞Ac	
〃	〃	〃	
ℭ𝔠Ca	ℭ𝔠Cb	ℭ𝔠Cc	

pag. 141.

2)

𝔄	𝔞	Aa	
𝔄	𝔞	Ab	
𝔄	𝔞	Ac	$'A^{p}$
𝔄	𝔞	Ba	
𝔄	𝔞	Bb	
𝔄	𝔞	Bc	
𝔄	𝔞	Ca	
𝔄	𝔞	Cb	
𝔄	𝔞	Cc	$'B^{qp}$
𝔄	𝔟	Aa	
〃		〃	
𝔄	𝔟	Cc	
𝔄	𝔠	Aa	$'C^{rqp}$
〃		〃	
𝔄	𝔠	Cc	
𝔅	𝔞	Aa	
	〃		
𝔅	𝔠	Cc	
ℭ	𝔞	Aa	
	〃		
ℭ	𝔠	Cc	$'D^{srqp}$

pag. 144.

2. Aufgabe.

Es werden für den hierunter gesetzten Zeiger die Variationen ohne Wiederholungen verlangt.

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 & \\ a, & b, & c, & d & = p \\ A, & B, & C, & D & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} & = s \end{matrix}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

a	b	c	d	
	Ab	Ac	Ad	p Á
	Ba	Bc	Bd	qp B̀
	Ca	Cb	Cd	
	Da	Db	Dc	
	𝔞Bc	𝔞Bd	𝔞Cb	
	𝔞Cd	𝔞Db	𝔞Dc	
	𝔟Ac	𝔟Ad	𝔟Ca	
	𝔟Cd	𝔟Da	𝔟Dc	rqp C̀
	𝔠Ab	𝔠Ad	𝔠Ba	
	𝔠Bd	𝔠Da	𝔠Db	
	𝔡Ab	𝔡Ac	𝔡Ba	
	𝔡Bc	𝔡Ca	𝔡Cb	
	𝔄𝔟Cd	𝔄𝔟Dc	𝔄𝔠Bd	
	𝔄𝔠Db	𝔄𝔡Bc	𝔄𝔡Cb	
	𝔅𝔞Cd	𝔅𝔞Dc	𝔅𝔠Ad	srqp D̀
	𝔅𝔠Da	𝔅𝔡Ac	𝔅𝔡Ca	
	ℭ𝔞Bd	ℭ𝔞Db	ℭ𝔟Ad	
	ℭ𝔟Da	ℭ𝔡Ab	ℭ𝔡Ba	
	𝔇𝔞Bc	𝔇𝔞Cb	𝔇𝔟Ac	
	𝔇𝔟Ca	𝔇𝔠Ab	𝔇𝔠Ba	

pag. 151.

3. Aufgabe.

Es ſoll für den Zeiger der zweiten Aufgabe die vierte Klaſſe der Variationen ohne Wiederholungen dargeſtellt werden.

Auflösung.

𝔄	𝔟	C	d
𝔄	𝔟	D	c
𝔄	𝔠	B	d
𝔄	𝔠	D	b
𝔄	𝔡	B	c
𝔄	𝔡	C	b
𝔅	𝔞	C	d
𝔅	𝔞	D	c
𝔅	𝔠	A	d
𝔅	𝔠	D	a
𝔅	𝔡	A	c
𝔅	𝔡	C	a
ℭ	𝔞	B	d
ℭ	𝔞	D	b
ℭ	𝔟	A	d
ℭ	𝔟	D	a
ℭ	𝔡	A	b
ℭ	𝔡	B	a
𝔇	𝔞	B	c
𝔇	𝔞	C	b
𝔇	𝔟	A	c
𝔇	𝔟	C	a
𝔇	𝔠	A	b
𝔇	𝔠	B	a

srqp *D*

pag. 158.

Variationen zu bestimmten Summen.

§. 58.

1. Aufgabe.

Die Variationen mit Wiederholungen zur Summe 5 für hierunter befindlichen Zeiger zu entwickeln.

1,	2,	3,	4,	5	
a,	b,	c,	d,	e	= p
A,	B,	C,	D,	E	= q
𝔞,	𝔟,	𝔠,	𝔡,	𝔢	= r
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈	= s
α,	β,	γ,	δ,	ε	= π

Auf-

Auflösungen.

1)

c	$^{5}\overset{p}{A}$
A d B c C b D a	$^{5}\overset{qp}{B}$
𝔞 A c 𝔞 B b 𝔞 C a 𝔟 A b 𝔟 B a 𝔠 A a	$^{5}\overset{rqp}{C}$
𝔄 𝔞 A b 𝔄 𝔞 B a 𝔄 𝔟 A a 𝔅 𝔞 A a	$^{5}\overset{srqp}{D}$
α 𝔄 𝔞 A a	$^{5}\overset{\pi srqp}{E}$

pag. 161.

2)

α 𝔄 𝔞 A a
𝔄 𝔞 A b
𝔄 𝔞 B a
𝔄 A c
𝔄 𝔟 A a
𝔞 B b
𝔞 C a
A d
𝔅 𝔞 A a
𝔟 A b
𝔟 B a
B c
𝔠 A a
C b
D a
e

pag. 166.

Anmerkung.

Das nämliche was in der Anmerkung zur ersten Aufgabe des §. 40 in Rücksicht auf die zweite Auflösung gesagt ist, muss auch hier in Hinsicht auf die zweite Auflösung erinnert werden.

2. *Aufgabe.*

Die vierte Klasse der Variationen mit Wiederholungen zur Summe 7 darzustellen.

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 & \\ a, & b, & c, & d & = p \\ A, & B, & C, & D & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} & = s \end{matrix}\right\}$$

 Auf-

Auflösung.

$\overset{srqp}{{}^{7}D}$

𝔄	𝔞	A	d
𝔄	𝔞	B	c
𝔄	𝔞	C	b
𝔄	𝔞	D	a
𝔄	𝔟	A	c
𝔄	𝔟	B	b
𝔄	𝔟	C	a
𝔄	𝔠	A	b
𝔄	𝔠	B	a
𝔄	𝔡	A	a
𝔅	𝔞	A	c
𝔅	𝔞	B	b
𝔅	𝔞	C	a
𝔅	𝔟	A	b
𝔅	𝔟	B	a
𝔅	𝔠	A	a
ℭ	𝔞	A	b
ℭ	𝔞	B	a
ℭ	𝔟	A	a
𝔇	𝔞	A	a

pag. 172.

3. Aufgabe.

Es sollen für die Summe 8 alle Variationen ohne Wiederholungen angegeben werden.

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h = p \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, & H = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e}, & \mathfrak{f}, & \mathfrak{g}, & \mathfrak{h} = r \end{array}\right\}$$

Auf-

Auflösung.

h 8 $\grave{A}^{p}$

A g
B f
C e 8 $\grave{B}^{qp}$
G a
F b
E c

$\mathfrak{a}$ B e
$\mathfrak{a}$ C e
$\mathfrak{a}$ E d
$\mathfrak{b}$ A b
$\mathfrak{b}$ E a
$\mathfrak{f}$ A b 8 $\grave{C}^{rqp}$
$\mathfrak{f}$ B a
$\mathfrak{a}$ D c
$\mathfrak{c}$ A d
$\mathfrak{c}$ D a
$\mathfrak{d}$ A c
$\mathfrak{d}$ C a

pag. 178.

4. *Aufgabe.*

Es wird die dritte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen zur Summe 11 verlangt.

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11 \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ k,\ l = p \\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ K,\ L = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{h},\ \mathfrak{i},\ \mathfrak{k},\ \mathfrak{l} = r \end{array}\right\}$$

Auflösung.

a B g
a C f
a D e
b C e
a G b
b A g
b G a
g A b
g B a
a F c
c A f
c F a
f A c
f C a
a E d
d A c
d E a
e A d
e D a
b E c
c B e
c E b
e B b
e C b

pag. 180.

§. 59.

Anmerkung.

Aus einer jedem durch Klassenzeichen ausgedrückten Gleichung für die Variationen einer und derselben Elementenreihe, läſst sich leicht eine Gleichung für die Variationen mehrerer Reihen machen. Folgende Gleichungen sollen als Beispiele dienen:

$${}'\overset{..tsrqp}{J} = {}'\overset{p}{A} + {}'\overset{qp}{B} + {}'\overset{rqp}{C} + {}'\overset{srqp}{D} + \dots$$

$${}^{n}\overset{..tsrqp}{J} = {}^{n}\overset{p}{A} + {}^{n}\overset{qp}{B} + {}^{n}\overset{pqp}{C} + {}^{n}\overset{srqp}{D} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \dots & \\ a, & b, & c, & d \dots & = p \\ A, & B, & C, & D \dots & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \dots & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} \dots & = s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

6. Gleichungen für die Combinationen und Variationen.

§. 60.

Bei der Entwickelung der Combinationen und Variationen sind jedesmal die Gleichungen aufgestellt, welche jede Darstellung des Geforderten darboth; jetzt sollen noch die entwickelt werden, welche sich darbiethen, wenn man die Combinationen überhaupt mit den Combinationen zu bestimmten Summen und so auch die Variationen überhaupt mit den Variationen zu bestimmten Summen vergleicht und ausser diesen Gleichungen sollen noch die dargestellt werden, welche die Beziehung der Combinationen und Variationen auf einander giebt.

§. 61.

Eine jede Combination überhaupt kann als eine Combination zu einer bestimmten Summe und umgekehrt, eine jede Combination zu einer bestimmten Summe kann als eine Combination überhaupt betrachtet werden. Es läßt sich daher eine jede *m*te Klasse der Combinationen überhaupt (mit oder ohne Wiederholungen) als ein Inbegriff

griff mehrerer *m*ten Klassen der Combinationen (mit oder ohne Wiederholungen) zu verschiedenen bestimmten Summen und zwar zu allen den Summen ansehn, für welche, dem gegebene Zeiger nach, eine *m*te Klasse statt findet. Eben dies nämliche gilt auch von den Variationen.

a) Gleichungen für die Combinationen mit Wiederholungen.

§. 62.

Es ist für dem Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcllllll} {}'A & = & {}^1A + & {}^2A + & {}^3A + & {}^4A + & {}^5A + & \ldots \\ {}'B & = & & {}^2B + & {}^3B + & {}^4B + & {}^5B + & \ldots \\ {}'C & = & & & {}^3C + & {}^4C + & {}^5C + & \ldots \\ {}'D & = & & & & {}^4D + & {}^5D + & \ldots \\ \text{''} & & & & & & \text{''} & \end{array}$$

Addirt man die hier über einanderstehenden Klassen so erhält man die Gleichung;

$$\left.\begin{array}{r} {}'A \\ +\,{}'B \\ +\,{}'C \\ +\,{}'D \\ \text{''} \end{array}\right\} = {}^1A + \left.\begin{array}{r} {}^2A \\ +\,{}^2B \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^3A \\ +\,{}^3B \\ +\,{}^3C \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^4A \\ +\,{}^4B \\ +\,{}^4C \\ +\,{}^4D \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^5A \\ +\,{}^5B \\ +\,{}^5C \\ +\,{}^5D \\ \text{''} \end{array}\right\} + \ldots,$$

Zu-

Zusatz.

Es ist für den Zeiger

$$\left[\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4\,\ldots \\ a, & b, & c, & d\,\ldots = p \\ A, & B, & C, & D\,\ldots = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}\,\ldots = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\,,\ldots = s \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''}\quad\quad \text{''} \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} {}'\overset{p}{A} \\ +{}'\overset{pq}{B} \\ +{}'\overset{rqp}{C} \\ +{}'\overset{srqp}{D} \\ \text{''} \end{array}\right\} = {}^1\overset{p}{A} + \left.\begin{array}{r} {}^2\overset{p}{A} \\ {}^2\overset{qp}{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^3\overset{p}{A} \\ +{}^3\overset{qp}{B} \\ +{}^3\overset{rqp}{C} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^4\overset{p}{A} \\ +{}^4\overset{qp}{B} \\ +{}^4\overset{rqp}{C} \\ +{}^4\overset{srqp}{D} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} {}^5\overset{p}{A} \\ +{}^5\overset{qp}{B} \\ +{}^5\overset{rqp}{C} \\ +{}^5\overset{srqp}{D} \end{array}\right\} + \ldots$$

β) Gleichungen für die Combinationen ohne Wiederholungen.

§. 63.

Für den ersten Zeiger des vorhergehenden Paragraphs ist.

$$\begin{array}{lllllll} A^{\backprime} = {}^1A^{\backprime} + {}^2A^{\backprime} & + {}^3A^{\backprime} & + {}^4A^{\backprime} & + {}^5A^{\backprime} & + {}^6A^{\backprime} & + \ldots \\ B^{\backprime} = & {}^3B^{\backprime} & + {}^4B^{\backprime} & + {}^5B^{\backprime} & + {}^6B^{\backprime} & + \ldots \\ C^{\backprime} = & & & & + {}^6C^{\backprime} & + \ldots \\ \text{''} & & & & & \end{array}$$

Die Addition der übereinanderstehenden Klassen giebt diese Gleichung:

A`

$$\left.\begin{matrix} A' \\ +B' \\ +C' \\ '' \end{matrix}\right\} = {}^{1}A' + {}^{2}A' + {}^{3}A' + \left.\begin{matrix} {}^{4}A' \\ +{}^{3}B' \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}^{5}A' \\ +{}^{4}B' \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}^{6}A' \\ +{}^{5}B' \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}^{6}A' \\ +{}^{6}B' \\ +{}^{6}C' \end{matrix}\right\} + .$$

Zusatz.

Für den zweiten Zeiger des vorigen Paragraphs ist

$$\left.\begin{matrix} \overset{p}{A}' \\ +\overset{qp}{B}' \\ +\overset{rqp}{C}' \\ '' \end{matrix}\right\} = {}^{1}\overset{p}{A}' + {}^{2}\overset{p}{A}' + {}^{3}\overset{p}{A} + \left.\begin{matrix} {}^{4}\overset{p}{A}' \\ +{}^{3}\overset{qp}{B} \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}^{5}\overset{p}{A}' \\ +{}^{4}\overset{qp}{B} \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}^{6}\overset{p}{A}' \\ +{}^{5}\overset{qp}{B} \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}^{6}\overset{p}{A}' \\ +{}^{6}\overset{qp}{B} \\ +{}^{6}\overset{rqp}{C} \end{matrix}\right\} +$$

γ) Gleichungen für die Variationen mit Wiederholungen.

§. 64.

Für den ersten Zeiger des §. 62 ist

$$\begin{aligned} 'A &= {}^{1}A + {}^{2}A + {}^{3}A + {}^{4}A + {}^{5}A + \ldots \\ 'B &= {}^{2}B + {}^{3}B + {}^{4}B + {}^{5}B + \ldots \\ 'C &= {}^{3}C + {}^{4}C + {}^{5}C + \ldots \\ 'D &= + {}^{4}D + {}^{5}D + \ldots \\ '' & \end{aligned}$$

Dies

Anmerkung. Für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3.. \\ a, & b, & c.. \end{pmatrix}$ ist die geringste Summe einer Binion ohne Wiederholungen gleich 1+2, die geringste einer Ternion gleich 1+2+3, die geringste einer Quaternion gleich 1+2+3+4, u. s. f. und eben so verhält es sich bei den Variationen ohne Wiederholungen.

Dies giebt diese Gleichung:

$$\left.\begin{matrix} {}'A \\ +{}'B \\ +{}'C \\ +{}'D \\ '' \end{matrix}\right\} = {}^{1}A + \left\{\begin{matrix} {}^{2}A \\ +{}^{2}B \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} {}^{3}A \\ +{}^{3}B \\ +{}^{3}C \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} {}^{4}A \\ +{}^{4}B \\ +{}^{4}C \\ +{}^{4}D \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} {}^{5}A \\ +{}^{5}B \\ +{}^{5}C \\ +{}^{5}D \\ '' \end{matrix}\right\} + \ldots,$$

Zusatz.

Für den zweiten Zeiger des §. 62. ist

$$\left.\begin{matrix} {}'\overset{p}{A} \\ +{}'\overset{pq}{B} \\ +{}'\overset{rqp}{C} \\ +{}'\overset{srqp}{D} \\ '' \end{matrix}\right\} = {}^{1}\overset{p}{A} + \left\{\begin{matrix} {}^{2}\overset{p}{A} \\ {}^{2}\overset{qp}{B} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} {}^{3}\overset{p}{A} \\ +{}^{3}\overset{qp}{B} \\ +{}^{3}\overset{rqp}{C} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} {}^{4}\overset{p}{A} \\ +{}^{4}\overset{qp}{B} \\ +{}^{4}\overset{rqp}{C} \\ +{}^{4}\overset{srqp}{D} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} {}^{5}\overset{p}{A} \\ +{}^{5}\overset{qp}{B} \\ +{}^{5}\overset{rqp}{C} \\ +{}^{5}\overset{srqp}{D} \end{matrix}\right\} + \ldots$$

δ) Gleichungen für die Variationen ohne Wiederholungen.

§. 65.

Für den ersten Zeiger des §. 62 ist

$$\begin{aligned} A^{\grave{}} &= {}^{1}A^{\grave{}} + {}^{2}A^{\grave{}} + {}^{3}A^{\grave{}} + {}^{4}A^{\grave{}} + {}^{5}A^{\grave{}} + {}^{6}A^{\grave{}} + \ldots \\ B^{\grave{}} &= {}^{3}B^{\grave{}} + {}^{4}B^{\grave{}} + {}^{5}B^{\grave{}} + {}^{6}B^{\grave{}} + \ldots \\ C^{\grave{}} &= {}^{6}C^{\grave{}} + \ldots \\ '' & \end{aligned}$$

Wird hier das übereinanderstehende addirt, so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{matrix}+A' \\ +B' \\ +C'\end{matrix}\right\} \!{}'' = {}^1A' \;\; {}^2A' + \left.\begin{matrix}{}^3A' \\ +{}^3B'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^4A' \\ +{}^4B'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^5A' \\ +{}^5B'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^6A' \\ +{}^6B' \\ +{}^6C\end{matrix}\right\}$$

Zusatz.

Es ist für den zweiten Zeiger des §. 62

$$\left.\begin{matrix}\overset{p}{A}' \\ +B' \\ +\overset{rqp}{C}''\end{matrix}\right\} \!{}'' = {}^1\overset{p}{A}' + {}^2\overset{p}{A}' + \left.\begin{matrix}{}^3\overset{p}{A}' \\ +{}^3\overset{qp}{B}'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^4\overset{p}{A}' \\ +{}^4\overset{qp}{B}'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^5\overset{p}{A}' \\ +{}^5\overset{qp}{B}'\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}{}^6\overset{p}{A}' \\ +{}^6\overset{qp}{B}' \\ +{}^6\overset{rqp}{C}''\end{matrix}\right\} +$$

§. 66.

Erklärung.

Wenn Complexionen, die sich blos durch die Anordnung ihrer Elemente von einander unterscheiden, als identische betrachtet werden, so hat man den Inbegriff derselben, wenn man sie zählt, eine davon hinschreibt und dieser die gefundene Zahl vorsetzt *a*). Wird also in einer Variationsklasse jede gutgeordnete Complexion mit den schlecht-

*) Eine Complexion ist z. B. mit ihren Versetzungen völlig gleichgültig, wenn man die Complexionen als Summen oder Produkte betrachtet, also ihre Elemente durch die Addition oder Multiplication verbunden denkt.

ſchlechtgeordneten als gleichgültig angeſehn, die aus ihr durch die Verſetzung ihrer Elemente entſpringen, ſo braucht man nur um die mte Variationsklaſſe zu erhalten, alle ihre gutgeordnete Mtionen aufzuſuchen und einer jeden derſelben die ihr zugehörige Verſetzungszahl vorzuſetzen. Oder man hat die mte Variationklaſſe der Elemente a, b, c, d . . ., wenn man die mte Combinationsklaſſe dieſer Elemente hinſchreibt und jeder Combination gedachte Verſetzungszahl vorſetzt.

Will man anzeigen, daſs man ſich einer jeden Complexion einer Combinationsklaſſe die Verſetzungszahl vorgeſchrieben denkt, ſo ſchreibt man vor das Klaſſenzeichen einen ihm gleichnamigen kleinen deutſchen Buchſtaben. Dieſer Buchſtabe wird dann Polynomialcoefficient genannt. Z. B. $\mathfrak{c}\mathrm{C}$. Hieraus erhellet auch was unter $\mathfrak{i}\mathrm{J}$ zu verſtehen iſt.

Anmerkung.

Ietzt ſollen die Gleichungen aufgeſtellt werden, welche unter der Vorausſetzung gelten, daſs eine Combination mit ihren Verſetzungen einerlei iſt.

ζ) Gleichungen zwiſchen Combinationen und Variationen mit Wiederholungen.

§. 67.

1)

Es iſt $'A = \mathfrak{a}\,'\mathrm{A}$, $'B = \mathfrak{b}\,'\mathrm{B}$, $'C = \mathfrak{c}\,'\mathrm{C}$, $'D = \mathfrak{d}\,'\mathrm{D}$ u. ſ. w.

alſo $'A + 'B + 'C + 'D + \ldots = \mathfrak{a}\,'\mathrm{A} + \mathfrak{b}\,'\mathrm{B} + \mathfrak{c}\,'\mathrm{C} + \mathfrak{d}\,'\mathrm{D} + \ldots$

3)

Wegen §. 63 ist

$$\begin{aligned}
{}_{a}{}'A &= {}_{a}{}^{1}A + {}_{a}{}^{2}A + {}_{a}{}^{3}A + {}_{a}{}^{4}A + \cdots \\
{}_{b}{}'B &= \phantom{{}_{a}{}^{1}A + {}} {}_{b}{}^{2}B + {}_{b}{}^{3}B + {}_{b}{}^{4}B + \cdots \\
{}_{c}{}'C &= \phantom{{}_{a}{}^{1}A + {}_{a}{}^{2}A + {}} {}_{c}{}^{3}C + {}_{c}{}^{4}C + \cdots \\
{}_{d}{}'D &= \phantom{{}_{a}{}^{1}A + {}_{a}{}^{2}A + {}_{a}{}^{3}A + {}} {}_{d}{}^{4}D + \cdots \\
&\;''
\end{aligned}$$

daher

$$\left.\begin{array}{l} {}_{a}{}'A \\ + {}_{b}{}'B \\ + {}_{c}{}'C \\ + {}_{d}{}'D \\ \;'' \end{array}\right\} = {}_{a}{}^{1}A + \left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{2}A \\ + {}_{b}{}^{2}B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{3}A \\ + {}_{b}{}^{3}B \\ + {}_{c}{}^{3}C \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{4}A \\ + {}_{b}{}^{4}B \\ + {}_{c}{}^{4}C \\ + {}_{d}{}^{4}D \end{array}\right\} + \cdots$$

Die erste Seite dieser Gleichung ist die zweite Seite der letzten Gleichung in 1), folglich können diese beiden Seiten gegen einander umgetauscht werden, also ist auch

$$\left.\begin{array}{l} 'A \\ + 'B \\ + 'C \\ + 'D \end{array}\right\} = {}_{a}{}^{1}A + \left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{2}A \\ {}_{b}{}^{2}B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{3}A \\ + {}_{b}{}^{3}B \\ + {}_{c}{}^{3}C \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} {}_{a}{}^{4}A \\ + {}_{b}{}^{4}B \\ + {}_{c}{}^{4}C \\ + {}_{d}{}^{4}D \end{array}\right\} + \cdots$$

ε) Gleichungen zwischen Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen.

§. 68.

1)

Es ist $A' = {}_a\mathrm{A}',\ B' = {}_b\mathrm{B}',\ C' = {}_c\mathrm{C}',\ D' = {}_d\mathrm{D}'$ u. s. w

also $A' + B' + C' + D' + \ldots = {}_a\mathrm{A}' + {}_b\mathrm{B}' + {}_c\mathrm{C}' + {}_d\mathrm{D}' + \ldots$

2)

Wegen §. 63 ist

$$\begin{array}{l} {}_a\mathrm{A}' = {}_a^1\mathrm{A}' + {}_a^2\mathrm{A}' + {}_a^3\mathrm{A}' + {}_a^4\mathrm{A}' + {}_a^5\mathrm{A}' + {}_a^6\mathrm{A}' + \ldots \\ {}_b\mathrm{B}' = \qquad\qquad\qquad {}_b^3\mathrm{B}' + {}_b^4\mathrm{B}' + {}_b^5\mathrm{B}' + {}_b^6\mathrm{B}' \\ {}_c\mathrm{C}' = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_c^6\mathrm{C}' \\ '' \end{array}$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} {}_a\mathrm{A}' \\ +{}_b\mathrm{B}' \\ +{}_c\mathrm{C}' \\ '' \end{array}\right\} = {}_a^1\mathrm{A}' + {}_a^2\mathrm{A}' + \left.\begin{array}{l} {}_a^3\mathrm{A}' \\ {}_b^3\mathrm{B}' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^4\mathrm{A}' \\ {}_b^4\mathrm{B}' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^5\mathrm{A}' \\ {}_b^5\mathrm{B}' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^6\mathrm{A}' \\ {}_b^6\mathrm{B}' \\ {}_c^6\mathrm{C}' \end{array}\right\} + \ldots$$

also auch wegen der letzten Gleichung in 2)

$$\left.\begin{array}{l} A' \\ +B' \\ +C' \\ '' \end{array}\right\} = {}_a^1\mathrm{A}' + {}_a^2\mathrm{A}' + \left.\begin{array}{l} {}_a^5\mathrm{A}' \\ {}_b^3\mathrm{B}' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^4\mathrm{A}' \\ {}_b^4\mathrm{B}' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^5\mathrm{A}' \\ {}_b^5\mathrm{B}' \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}_a^6\mathrm{A}' \\ {}_b^6\mathrm{B}' \\ {}_c^6\mathrm{C}' \end{array}\right\} + \ldots$$

§. 69.

Anmerkung.

Die Gleichungen in §. 63 — §. 66 ſtellen ganz deutlich das Verhältniſs vor Augen, in welchem die Combinationen überhaupt mit den Combinationen zu beſtimmten Summen und in welchem die Variationen überhaupt mit den Variationen zu beſtimmten Summen ſtehn. Die Gleichungen des §. 67. und §. 68 machen mit dem Verhältniſſe der Variationenen zu den Combinationen bekannnt.

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis.

I) Erklärung analytischer Zeichen.

§. 70.

α) *Bezeichnung der Reihen.*

Reihe überhaupt wird durch S (Series) angedeutet. Spricht man von der ersten, zweiten, dritten u. s. w. *m*ten Reihe so bezeichnet man dieses durch S1, S2, S3 u. s. w. Sm.

Zur Bezeichnung einzelner Reihen ausser der Ordnung gebraucht man die kleinen lateinischen Buchstaben p, q, r, s u. s. w. auch wohl die griechischen π, ρ, σ, τ u. s. f. Z. B. $Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots = p$.

β) *Bezeichnung der Coefficienten.*

Coefficient wird durch c, k oder $\varkappa$ und die Ausdrücke, erster, zweiter, dritter, vierter u. s. w. *m*ter Coefficient werden daher durch $\varkappa 1$, $\varkappa 2$,

 $\varkappa 3$,

$\varkappa 3$, $\varkappa 4$ u. s. w. $\varkappa m$ oder auch durch c1, c2, c3, c4 u. s. f. cm angedeutet. Das Zeichen der Reihen von deren Coefficienten die Rede ist, wird links vor diese Zeichen geschrieben. Hiernach heisst z. B. $p\varkappa m$, der *m*te Coefficient der Reihe p; $\frac{r}{s}\varkappa(n+1)$, der n+1te Coefficient des Quotienten der Reihe r durch die Reihe s; $y^n\varkappa(m+3)$, der m+3te Coefficient der *n*ten Dignität der Reihe y.

Zu den allgemeinen Coefficienten einer Reihe werden die Buchstaben eines lateinischen, deutschen oder eines andern Alphabets genommen, so dass man den ersten Buchstaben eines Alphabets gewöhnlich zum ersten, den zweiten Buchstaben zum zweiten Coefficienten nimmt u. s. w. Die bloss angenommenen Coefficienten unterscheidet man von den gegebenen dadurch, dass man über jene einen Punkt setzt, über diese aber nicht. In der Reihe $Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ sieht man also die Coefficienten als gegebene an, hingegen in der Reihe $\dot{A}z + \dot{B}z^2 + \dot{C}z^3 + \dot{D}z^4 + \ldots$, als angenommene. Häufig werden auch die Zeichen $\varkappa 1$, $\varkappa 2$, $\varkappa 3$ u. s. f. für die Reihencoefficienten selbst gesetzt und zwar so wie sie hier jetzt angegeben sind für gegebene und mit einem Punkte darüber für angenommene Coefficienten. Sie sind also in diesem Falle Stellvertreter der eigentlichen Coefficienten, daher man auch das Zeichen $\varkappa$, wenn es so gebraucht wird, ein Localzeichen nennt.

γ) Bezeichnung der Glieder.

Glied deutet man durch t oder 7 (terminus) an und daher die Ausdrücke erstes, zweites, drittes u. s. f. *m*tes Glied durch 71, 72, 73...7m oder auch durch t1, t2, t3...tm. Die Zeichen der Reihen auf welche sich ein solches Gliedzeichen beziehen soll, werden ihm vorgeschrieben. Will man also, *m*tes Glied der Reihe *p*, *n*tes Glied des Produkts qp, m+ntes Glied des Quotienten $\frac{p}{q}$, durch Zeichen ausdrücken, so schreibt man:

man: $p\,7\,m$, $qp\,7\,n$, $\frac{p}{q}\,7\,(m+n)$. *a*). Oft setzt man die Zeichen $p\,7\,1$, $p\,7\,2$, $p\,7\,3$ u. s. f. statt der Glieder selbst, in die Reihe p, so dass sie also Stellvertreter der eigentlichen Glieder werden. In diesem Falle wird 7 dann ebenfalls ein **Localzeichen** genannt *b*).

δ) *Bezeichnung der Exponenten.*

Exponent wird im allgemeinen mit e oder ε bezeichnet. Die Zeichen $p^m 7\,1\,(e)$, $p^m 7\,2\,(e)$, $p^m 7\,3\,(e)$ u. s. f. $p^m 7\,n\,(e)$ zeigen daher in der Ordnung wie sie genannt sind, den Exponenten des **ersten**, **zweiten**, **dritten** u. s. f. nten Gliedes der mten Dignität der Reihe p an.

Bei den Reihen ist es sehr vortheilhaft zu den allgemeinen Exponenten Buchstaben zu nehmen, die mit denen gleichnamig sind, die man zu den Coefficienten genommen hat. Z. B. $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$, $\mathfrak{A}z^a + \mathfrak{B}z^b + \mathfrak{C}z^c + \mathfrak{D}z^d + \ldots$

a) Wird von dem *m*ten Coefficienten des *n*ten Gliedes des Produkts der Reihen q, p gesprochen, so wird dieses durch $qp\,7\,n\,(\varkappa)\,m$ angezeigt. Hieraus erhellet wie in andern Fällen die Zeichen ϰ und 7 und die Zeichen der Reihen neben einander geschrieben werden müssen.

b) Wenn die Zeichen ϰ und 7 in einer Formel als Localzeichen vorkommen, so heisst diese Formel, **Localformel**. Will man anzeigen, dass sich das ϰ einer solchen Formel auf die Coefficienten a, b, c, d u. s. f. der Reihe p bezieht z. B. ϰ1 auf a, ϰ2 auf b, ϰ3 auf c u. s. w., so setzt man unter die Formel das Zeichen p (a, b, c, d....), welches dann **Scale** genannt wird. Es können auch Scale und Zeiger durch ein einziges Zeichen angedeutet werden, z. B. durch $p\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, \ldots \\ & 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{matrix}\right)$, wenn p (a, b, c, d, e...) die Scale und $\left(\begin{matrix} b, & c, & d, & e \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{matrix}\right)$ der Zeiger ist.

Wenn A, B, C die Coefficienten der Dignitäten z^a, z^b, z^c; ferner $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Coefficienten der z^a, z^b, z^c ſind, ſo daſs alſo ABC der Coefficient der Dignität z^{a+b+c} iſt und man ſetzt nun $ABC + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = P$, ſo pflegt man $ABCz^{a+b+c} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{a+b+c} = Pz^*$ zu ſetzen, wo alſo $*$ einen veränderlichen relativen Exponenten bedeutet, Dies wird zur Erläuterung folgender Erklärung dienen:

Wenn man S als eine Summe von Produkten und einen jeden Factor dieſer Produkte als einen Coefficienten einer Dignität von z anſieht und nun anzeigen will, daſs ein jedes jener Produkte durch d i e Dignität der z multiplicirt gedacht wird, von welchen es, ſeiner Factoren wegen, Coefficient iſt, ſo ſchreibt man neben S das Zeichen z^* *a*).

II. Combinatoriſche Entwickelung der Produkte.

§. 71.

Allgemeine Wahrheiten, welche die Multiplication der Reihen betreffen.

1) Wenn mehrere Reihen unter ſich multiplicirt werden, ſo ſtimmt die Handlung die hierbei vorgenommen wird, um die einzelnen Theile des Produkts zu erhalten, völlig mit dem Variiren dieſer Reihen überein. Bei der Multiplication zweier Reihen p und q z. B. werden ſucceſſiv jedem Gliede der Reihe p die einzelnen Glieder der Reihe q vorgeſchrieben und eben dieſes iſt auch der Fall, wenn man nach §. 57 alle Variationen dieſer Reihen ſucht. Um das Produkt dreier Reihen p, q, r zu erhalten ſchreibt man jedem Gliede des Produkts qp ſucceſſiv

a) Das Zeichen $*$ wird ſehr häufig auch noch in andern Fällen ſo relativ als hier gebraucht, nämlich da wo ſeine Relation und daher ſein relativer Werth leicht in die Augen fällt. Ein Beiſpiel hiervon findet man pag. 112. 4. Zuſatz.

ceſſiv die einzelnen Glieder der dritten Reihe r vor und auf die nämliche Weiſe erhält man auch nach §. 57 aus den Variationen zweier Reihen qp durch die dritte r alle Variationen dieſer drei Reihen. Es iſt alſo das Produkt der m Reihen p, q, r . . . x, y der Inbegriff aller Variations-mtionen derſelben welche §. 57 giebt, folglich gleich $\overset{yx..rqp}{'\mathcal{M}}$. a).

2) Wenn ſich der hierunterſtehende Zeiger

$$\left[\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots \\ A,\ B,\ C,\ D,\ E\ \ldots = p \\ a.\ b,\ c,\ d,\ e\ \ldots = q \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ \ldots = x \end{array}\right]$$

auf m Reihen bezieht, ſo iſt das Produkt dieſer Reihen gleich $\overset{x..rqp}{'\mathcal{M}} = {}^{m}\overset{x..rpq}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{x..rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+2}\overset{x..rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+3}\overset{x..rqp}{\mathcal{M}} + \ldots$ (§. 64). Man erhält alſo für den gegebenen Zeiger auch das Produkt ſeiner m Reihen, wenn man nach §. 49 alle Variations-mtionen derſelben zur Summe m, m+1, m+2, m+3 u. ſ. f. aufſucht.

3) Wenn m Reihen, deren jede die nämliche Gröſse z enthält und die Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ hat, unter ſich multiplicirt werden ſollen, ſo erhält man das Produkt, wenn man die Coefficienten der Reihen erſtlich für ſich unter ſich multiplicirt und hierauf neben jedes gefundene Coefficientenprodukt eine Dignität der z ſchreibt deren Exponent die Summe der Exponenten derjenigen Dignitäten von z iſt, zu welchen die Factoren des

a) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daſs die einzelnen Elemente jeder Mtion durch die Multiplication zu verbinden ſind und daſs daher das Zeichen + oder — einer jeden Mtion von den Zeichen ihrer Elemente abhängt.

des Coefficientenprodukts als Coefficienten gehören. Denn werden z. B. die beiden Reihen $Az^a + Bz^b + Cz^c$ und $\mathfrak{A}z^a + \mathfrak{B}z^b + \mathfrak{C}z^c$ nach der gewöhnlichen Methode unter sich multiplicirt so bekömmt man das Produkt:

$$\mathfrak{A}Az^{a+a} + \mathfrak{A}Bz^{a+b} + \mathfrak{A}Cz^{a+c} + \mathfrak{B}Cz^{b+c} + \mathfrak{C}Cz^{c+c},$$
$$+ \mathfrak{B}Az^{b+a} + \mathfrak{B}Bz^{b+b} + \mathfrak{C}Bz^{c+b}$$
$$+ \mathfrak{C}Az^{c+a}$$

welches man offenbar erhalten würde, wenn man erstlich die beiden Reihen $A + B + C$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ unter sich multiplicirte und hierauf neben einen jeden einzelnen Theil des ganzen Produkts eine Dignität der z schriebe, deren Exponent eine solche Summe ist, als vorhin angegeben wurde.

4) Macht man sich für die Coefficienten der Reihen

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots$$
$$\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

den Zeiger

$$\left[\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ A,\ B,\ C,\ D\ldots, \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}\ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ldots \end{array}\right]$$

so ist jedesmal ein Produkt mehrerer dieser Coefficienten eine Complexion zu einer bestimmten Summe und zwar zu der Summe, welche gleich dem Exponenten derjenigen Dignität von z ist, zu welcher das Produkt als Coefficient gehört. Z. B. $A\mathfrak{C}\delta$ ist eine Ternion zur Summe 8 und zugleich ein Coefficient der z^8.

§. 72.

1. *Aufgabe.*

Es wird das Produkt folgender m Reihen gesucht

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots = \pi$$
$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots = \rho$$
$$\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots = \tau$$
$$\text{"}\qquad\text{"}\qquad\text{"}\qquad\text{"}\qquad\text{"}$$

Auf-

Auflösung.

1) Man suche nach §. 49 für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \\ a,\ b,\ c,\ d \ldots = p \\ A,\ B,\ C,\ D \ldots = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D} \ldots = s \\ \text{''}\ \ \text{''}\ \ \text{''}\ \ \text{''}\ \ \ \ \ \text{''} \end{array}\right\}$$

die mte Klasse zur Summe m, zur Summe m+1, zur Summe m+2, u. s. f.

2) Man multiplicire die mte Klasse zur Summe m mit z^m, die mte Klasse zur Summe m+1 mit z^{m+1}, die mte Klasse zur Summe m+2 mit z^{m+2}, u. s. f.

* *

Der Inbegriff des Gefundenen ist das verlangte Produkt, folglich ist dieses gleich

$$\overset{m}{\mathcal{M}}{}^{..rqp} z^m + \overset{m+1}{\mathcal{M}}{}^{..rqp} z^{m+1} + \overset{m+2}{\mathcal{M}}{}^{..rqp} z^{m+2}$$

$$+ \overset{m+3}{\mathcal{M}}{}^{..rqp} z^{m+3} + \ldots \text{ a)}.$$

Beweis.

Man erhält das Produkt der gegebenen Reihen, wenn man erstlich die Reihen unter sich multiplicirt, welche die Coefficienten für sich, also unabhängig von den Dignitäten der z, ausmachen und wenn man hierauf ein jedes der erhaltenen Produkte mit derjenigen Dignität der z multiplicirt zu der dasselbe als Coefficient, gehört. (§. 71. 3).

Das

a) Besitzt eine jede der m Reihen n Glieder, so ist die höchste Dignität der z gleich z^{mn}.

Das Produkt der Reihen, welche die Coefficienten für sich bilden, ist aber für den Zeiger der Auflösung gleich

$${}^{m}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+2}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+3}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+4}\overset{\cdot\cdot rqq}{\mathcal{M}} + \ldots$$

(§. 71, 2)) und eine jede Mtion zur Summe m ist hier ein Coefficient der z^m, eine jede Mtion zur Summe $m+1$ ist hier ein Coefficient der z^{m+1}, u. s. f. (§. 71, 4)), folglich ist auch das gesuchte Produkt das in der Auflösung angegebene.

1. *Beispiel.*

Es soll das Produkt der ersten beiden Reihen der Aufgabe entwickelt werden.

* * *

Hier ist $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ und daher $m = 2$, also das Produkt $\varrho\pi = {}^{2}\overset{qp}{\mathcal{B}} z^2 + {}^{3}\overset{qp}{\mathcal{B}} z^3 + {}^{4}\overset{qp}{\mathcal{B}} z^4 + {}^{5}\overset{qp}{\mathcal{B}} z^5 + {}^{6}\overset{qp}{\mathcal{B}} z^6 + \ldots\ldots$

Es ist aber ${}^{2}\overset{pq}{\mathcal{B}} = Aa$, ${}^{3}\overset{qp}{\mathcal{B}} = \begin{array}{l} A|b \\ Ba \end{array}$, ${}^{4}\overset{qp}{\mathcal{B}} = \begin{array}{l} A|c \\ Bb \\ Ca \end{array}$, ${}^{5}\overset{qp}{\mathcal{B}} = \begin{array}{l} A|d \\ Bc \\ Cb \\ Da \end{array}$

folglich auch $\varrho\pi = Aaz^2 + \left.\begin{array}{l} Ab \\ +Ba \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} Ac \\ +Bb \\ +Ca \end{array}\right\} z^4 + \left.\begin{array}{l} Ad \\ +Bc \\ +Cb \\ +Da \end{array}\right\} z^5 + \ldots\ldots$

2. *Beispiel.*

Das Produkt der ersten drei Reihen der Aufgabe zu entwickeln.

* * *

Hier

Hier ist $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$ und daher $m = 3$, also

$$\sigma\varrho\pi = {}^{3}\overset{rqp}{C} z^{3} + {}^{4}\overset{rqp}{C} z^{4} + {}^{5}\overset{rqp}{C} z^{5} + {}^{6}\overset{rqp}{C} z^{6} + {}^{7}\overset{rqp}{C} z^{7} + \ldots$$

Construirt man diese Klassen nach §. 49 so findet man

${}^{3}\overset{rqp}{C}$	${}^{4}\overset{rqp}{C}$	${}^{5}\overset{rqp}{C}$	${}^{6}\overset{rqp}{C}$	${}^{7}\overset{rqp}{C}$	
aAa,	aAb,	aAc,	aAd,	aAe,	u. s. w.
	aBa	aBb	aBc	aBd	
	bAa	aCa	aCb	aCc	
		bAb	aDa	aDb	
		bBa	bAc	aEa	
		cAa	bBb	bAd	
			bCa	bBc	
			cAb	bCb	
			cBa	bDa	
			dAa	cAc	
				cBb	
				cCa	
				dAb	
				dBa	
				eAa	

folglich $\sigma\varrho\pi =$

aAa z^{3}	+ aAb z^{4}	+ aAc z^{5}	+ aAd z^{6}	+ aAe z^{7}	+ …
	+ aBa	+ aBb	+ aBc	+ aBd	
	+ bAa	+ aCa	+ aCb	+ aCc	
		+ bAb	+ aDa	+ aDb	
		+ bBa	+ bAc	+ aEa	
		+ cAa	+ bBb	+ bAd	
			+ bCa	+ bBc	
			+ cAb	+ bCb	
			+ cBa	+ bDa	
			+ dAa	+ cAc	
				+ cBb	
				+ cCa	
				+ dAb	
				+ dBa	
				+ eAa	

3 Beispiel.

Es wird das Produkt der drei begrenzten Reihen gesucht.

$$az + bz^2 + cz^3 = \pi$$
$$Az + Bz^2 + Cz^3 = \varrho$$
$$\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 = \sigma$$

* * *

Die höchste Dignität der z welche hier im Produkte vorkommen kann ist gleich z^9 (§. 72, Note *a*)), folglich ist für den Zeiger $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \\ a & b & c & = p \\ A & B & C & = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & = r \end{matrix}\right\}$, das Produkt $\sigma\varrho\pi$ gleich

$${}^3\overset{rqp}{C}z^3 + {}^4\overset{rqp}{C}z^4 + {}^5\overset{rqp}{C}z^5 + {}^6\overset{rqq}{C}z^6 + {}^7\overset{rqp}{C}z^7 + {}^8\overset{rqp}{C}z^8 + {}^9\overset{rqp}{C}z^9.$$

Diese Klassen lassen sich bis ${}^6C$ nach §. 49. entwickeln, hingegen bei der Entwickelung der übrigen Klassen muss man zu §. 51. seine Zuflucht nehmen, Man mache sich daher nach §. 49. arithm. comb. Aufl. und nach §. 51. für die einzelnen Klassen das Schema.

${}^3C$	${}^4C$	${}^5C$	${}^6C$	${}^7C$	${}^8C$	${}^9C$
111	112	113	123	133	233	333
	121	122	132	223	323	
	211	131	213	232	332	
		212	222	313		
		221	231	322		
		311	312	331		
			321			

und substituire in diesem für das erste Element jeder Complexion das ihm zugehörige Element der dritten Reihe des Zeigers, für das zweite setze man ein Element der zweiten

Reihe

Reihe und für das dritte Element schreibe man ein Element der ersten Reihe des Zeigers, so erhält man $\sigma\varrho\pi$ gleich

$$
\begin{array}{llllll}
\mathfrak{a}Aaz^3 + \mathfrak{a}Ab & z^4 + \mathfrak{a}Ac & z^5 + \mathfrak{a}Bc & z^6 + \mathfrak{a}Cc & z^7 + \mathfrak{b}Cc & z^8 + \mathfrak{c}Ccz^9 \\
\quad\;\; + \mathfrak{a}Ba & \;\; + \mathfrak{a}Bb & \;\; + \mathfrak{a}Cb & \;\; + \mathfrak{b}Bc & \;\; + \mathfrak{c}Bc & \\
\quad\;\; + \mathfrak{b}Aa & \;\; + \mathfrak{a}Ca & \;\; + \mathfrak{b}Ac & \;\; + \mathfrak{b}Cb & \;\; + \mathfrak{c}Cb & \\
 & \;\; + \mathfrak{b}Ab & \;\; + \mathfrak{b}Bb & \;\; + \mathfrak{c}Ac & & \\
 & \;\; + \mathfrak{b}Ba & \;\; + \mathfrak{b}Ca & \;\; + \mathfrak{c}Bb & & \\
 & \;\; + \mathfrak{c}Aa & \;\; + \mathfrak{c}Ab & \;\; + \mathfrak{c}Ca & & \\
 & & \;\; + \mathfrak{c}Ba & & &
\end{array}
$$

Anmerkung.

Sollten die drei Reihen

$$
\begin{array}{l}
az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 \\
Az + Bz^2 + Cz^3 \\
\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4
\end{array}
$$

unter sich multiplicirt werden und man legte bei der Entwickelung des Produkts den Zeiger

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 3, & 4 & 5 \\
a, & b, & c, & d, & e \\
A, & B, & C, & & \\
\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, &
\end{array}\right]
$$

zum Grunde, so würden in ${}^{6}\mathcal{C}$, ${}^{7}\mathcal{C}$ u. s. f. alle Complexionen weggelassen werden müssen in welchen D, E und $\mathfrak{e}$ vorkämen, weil diese Elemente in dem Zeiger fehlen also als Null anzusehn sind und daher auch die Produkte zu Null machen in denen sie sich befinden. Hieraus wird erhellen, wie zu verfahren ist, wenn das Produkt mehrerer Reihen, die nicht eine gleiche Anzahl Elemente haben, entwickelt werden soll.

Zusatz.

Es ist das m + 1te Glied des Produkts der m Reihen der Aufgabe, oder welches das nämliche ist, es ist

$$
\cdots\tau\sigma\varrho\pi\rceil n+1 = {}^{m+n}\overset{\dots rqp}{\mathcal{M}}{}_{2}^{m+n}
$$

§. 73.

2. *Aufgabe.*

Es ſoll das Produkt folgender *m* Reihen angegeben werden.

$$az^{\delta} + bz^{2\delta} + cz^{3\delta} + dz^{4\delta} + \ldots = \pi$$
$$Az^{\delta} + Bz^{2\delta} + Cz^{3\delta} + Dz^{4\delta} + \ldots = \rho$$
$$\mathfrak{a}z^{\delta} + \mathfrak{b}z^{2\delta} + \mathfrak{c}z^{3\delta} + \mathfrak{d}z^{4\delta} + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A}z^{\delta} + \mathfrak{B}z^{2\delta} + \mathfrak{C}z^{3\delta} + \mathfrak{D}z^{4\delta} + \ldots = \tau$$
$$'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad ''$$

Auflöſung.

Bedient man ſich hier des Zeigers der Aufgabe des §. 72, ſo iſt das geſuchte Produkt gleich

$$^{m}\mathcal{M}^{\ldots rqp} z^{m\delta} + {}^{m+1}\mathcal{M}^{\ldots rqp} z^{(m+1)\delta} + {}^{m+2}\mathcal{M}^{\ldots rqp} z^{(m+2)\delta}$$
$$+ {}^{m+5}\mathcal{M}^{\ldots rqp} z^{(m+5)\delta} + \ldots$$

Beweis.

Die Exponenten der z der gegebenen Reihen der zweiten Aufgabe haben die Benennung δ, hingegen die Exponenten der z der Reihen der erſten Aufgabe ſind unbenannte Zahlen und hierdurch allein ſind auch nur die gegebenen Reihen der beiden Aufgaben von einander unterſchieden. Aus dieſem Grunde muſs auch das Produkt der zweiten Aufgabe aus dem Produkte der erſten entſtehn, wenn man in dieſem den Exponenten der z die Benennung δ giebt. Da nun hierdurch aus dem Produkte der erſten Aufgabe das in der Auflöſung der zweiten Aufgabe aufgeſtellte Produkt wird, ſo iſt einleuchtend, daſs die zweite Aufgabe richtig aufgelöſet iſt.

Zusatz.

Es ist $\ldots\tau\sigma\varrho\pi 7\,(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}\,z^{m+n}$ und

$\ldots\tau\sigma\varrho\pi 7\,(n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}.$

§. 74.

3. *Aufgabe.*

Es wird das Produkt folgender *m* Reihen gesucht

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots = \pi$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots = \tau$$
$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \qquad \text{〃}$$

Auflösung.

Nimmt man zur Entwickelung des Produkts wieder den Zeiger der ersten Aufgabe, so ist

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi = {}^{m}\overset{...rqp}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{...rqp}{\mathfrak{M}}z + {}^{m+2}\overset{...rqp}{\mathfrak{M}}z^2 + {}^{m\cdot}\overset{...rqp}{\mathfrak{M}}z^3 + \ldots$$

Beweis.

Man erhält die gegebenen Reihen der dritten Aufgabe, wenn man eine jede Reihe der ersten Aufgabe durch z dividirt, folglich muss auch aus dem Produkte der ersten Aufgabe dass durch die dritte Aufgabe verlangte entstehn, wenn man jenes durch z^m dividirt. Dividirt man aber das Produkt der ersten Aufgabe durch z^m, so bekömmt man das in der Auflösung der dritten Aufgabe aufgestellte, folglich ist dieses auch das richtige.

1. Zusatz.

Es ist $..\tau\sigma\varrho\pi 7\,(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}z^{n}$, also

$$\tau\sigma\varrho\pi 7\,(n+1)\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathcal{M}}.$$

1. Beispiel.

Es soll das dritte Glied der hierunterstehenden fünf Reihen

$$\begin{array}{l}
a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots \\
A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots \\
\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + \mathfrak{e}z^4 + \ldots \\
\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \ldots \\
\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots
\end{array}$$

entwickelt werden.

Hier ist $m=5$, $\mathcal{M}$ wird E, $n+1$ ist 3 und daher $n=2$, und folglich das gesuchte Glied gleich ${}^{7}\overset{...rqp}{E}z^2$.

Es ist aber ${}^{7}\overset{...rqp}{E} =$

$$\begin{array}{l}
A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\gamma \\
A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\beta \\
A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\,\alpha \\
A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\beta \\
A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\
A\,a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\
A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\
A\,b\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
A\,c\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\
B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\
B\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
B\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
C\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha
\end{array}$$

also ${}^{7}\overset{...rqp}{E}z^2 =$

$$\left.\begin{array}{l}
A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\gamma \\
+A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\beta \\
+A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\,\alpha \\
+A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\beta \\
+A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\
+A\,a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
+A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\
+A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\
+A\,b\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
+A\,c\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
+B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\beta \\
+B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\alpha \\
+B\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
+B\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha \\
+C\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,\alpha
\end{array}\right)z^2.$$

2. Bei-

2. *Beispiel.*

Es wird das 8te Glied des Produkts der fünf Reihen gesucht.

$$a + bz + cz^2 = \pi$$
$$A + Bz + Cz^2 = \rho$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 = \sigma$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 = \tau$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 = \varphi$$

Das verlangte Produkt ist gleich $^{12}\overset{tsrqp}{E}z^7$. Entwickelt man die Klasse ^{12}E nach §. 51 in Zahlen so erhält man das Schema ♀, und daher giebt die Figur ♁ das Produkt

♀	12333	♁	$+\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{c}Cc$
	13233		$+\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{b}Cc$
	13323		$+\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{c}Bc$
	13332		$+\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{c}Cb$
	22233		$+\beta\mathfrak{B}\mathfrak{b}Cc$
	22323		$+\beta\mathfrak{B}\mathfrak{c}Bc$
	22332		$+\beta\mathfrak{B}\mathfrak{c}Cb$
	23223		$+\beta\mathfrak{C}\mathfrak{b}Bc$
	23232		$+\beta\mathfrak{C}\mathfrak{b}Cb$
	23313		$+\beta\mathfrak{C}\mathfrak{c}Ac$
	23322		$+\beta\mathfrak{C}\mathfrak{c}Bb$
	23331		$+\beta\mathfrak{C}\mathfrak{c}Ca$
	31233		$+\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{b}Cc$
	31323		$+\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{c}Bc$ z^7
	31332		$+\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{c}Cb$
	32133		$+\gamma\mathfrak{B}\mathfrak{a}Cc$
	32223		$+\gamma\mathfrak{B}\mathfrak{b}Bc$
	32232		$+\gamma\mathfrak{B}\mathfrak{b}Cb$
	32313		$+\gamma\mathfrak{B}\mathfrak{c}Ac$
	32322		$+\gamma\mathfrak{B}\mathfrak{c}Bb$
	32 31		$+\gamma\mathfrak{B}\mathfrak{c}Ca$
	33123		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{a}Bc$
	33132		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{a}Cb$
	33213		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{b}Ac$
	33222		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{b}Bb$
	33231		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{b}Ca$
	33312		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{c}Ab$
	33321		$+\gamma\mathfrak{C}\mathfrak{c}Ba$

§. 75.

§. 75.

4. Aufgabe.

Das Produkt folgender m Reihen darzustellen.

$$a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots = \pi$$

$$A + Bz^{\delta} + Cz^{2\delta} + Dz^{3\delta} + \ldots = \varrho$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \mathfrak{d}z^{3\delta} + \ldots = \sigma$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \mathfrak{D}z^{3\delta} + \ldots = \tau$$

" " " " "

Auflösung.

In Rücksicht auf den Zeiger der Aufgabe des §. 72

ist $\ldots\tau\sigma\varrho\pi = {}^{m}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} z^{\delta} + {}^{m+2}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} z^{2\delta} + {}^{m+3}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} z^{3\delta} + \ldots$

Beweis.

Eben so wie die Richtigkeit der Auflösung der zweiten Aufgabe durch eine Vergleichung dieser zweiten mit der ersten Aufgabe dargethan ist, läſst sich hier wieder die Richtigkeit der Auflösung der vierten Aufgabe durch eine Vergleichung dieser vierten mit der dritten darthun.

Es ist $\ldots\tau\sigma\varrho\pi\, 7\,(n+1) = {}^{m+n}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}} z^{n\delta}$ und daher

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi\, 7\,(n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\overset{\ldots rqp}{\mathcal{M}}.$$

§. 76.

5. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen zu bestimmen.

$$az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots = v$$
$$Az^{\nu} + Bz^{\nu+\delta} + Cz^{\nu+2\delta} + Dz^{\nu+3\delta} + \ldots = w$$
$$\mathfrak{a}z^{\pi} + \mathfrak{b}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{c}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{d}z^{\pi+3\delta} + \ldots = x$$
$$\mathfrak{A}z^{\varrho} + \mathfrak{B}z^{\varrho+\delta} + \mathfrak{C}z^{\varrho+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\varrho+3\delta} + \ldots = y$$
$$'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad ''$$

Auflösung.

Man lege hier wieder den Zeiger der ersten Aufgabe zum Grunde und setze die Summe der Exponenten $\mu + \nu + \pi + \varrho + \cdots = \Sigma$, so ist

$$\cdot\cdot yxwv = {}^{m}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}}_z{}^{\Sigma} + {}^{m+1}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}}_z{}^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}}_z{}^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathcal{M}}_z{}^{\Sigma+3\delta} + \cdots$$

Beweis.

Es ist

$$az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + \ldots = (a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)z^{\mu}$$
$$Az^{\nu} + Bz^{\nu+\delta} + Cz^{\nu+2\delta} + \ldots = (A + Bz^{\delta} + Cz^{2\delta} + \ldots)z^{\nu}$$
$$\mathfrak{a}z^{\pi} + \mathfrak{b}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{c}z^{\pi+2\delta} + \ldots = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \ldots)z^{\pi}$$
$$\mathfrak{A}z^{\varrho} + \mathfrak{B}z^{\varrho+\delta} + \mathfrak{C}z^{\varrho+2\delta} + \ldots = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \ldots)z^{\varrho}$$
$$'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad ''$$

Bezeichnet man also die erste eingeklammerte Reihe mit S1, die zweite mit S2, die dritte mit S3 u. s. f. so wird

$$\ldots yxwv = (Sm \ldots\ldots S3.\ S2.\ S1.)\ z^{\mu+\nu+\pi+\varrho+\ldots}$$
$$= (Sm \ldots\ldots S3.\ S2.\ S1.)\ z^{\Sigma}$$

Es ist aber $(Sm \ldots\ldots S3.\ S2.\ S1.) = {}^{m}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{\delta} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{2\delta} + \ldots$ (§. 75), folglich auch

$$\ldots yxwv = {}^{m}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{\Sigma} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{\Sigma+3\delta} + \ldots$$

Zusatz.

Es ist $..yxwv\,7\,(n+1) = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}} z^{\Sigma+n\delta}$, also

$$.yxwv\,7\,(n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}.$$

1. *Beispiel.*

Es wird das dritte Glied des Produkts der hierunterstehenden Reihen gesucht.

$$az^2 + bz^4 + cz^6 + dz^7 + \ldots$$
$$Az^3 + Bz^5 + Cz^6 + Dz^8 + \ldots$$
$$\mathfrak{a}z^8 + \mathfrak{b}z^{10} + \mathfrak{c}z^{12} + \mathfrak{d}z^{14} + \ldots$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^3 + \mathfrak{C}z^5 + \mathfrak{D}z^7 + \ldots$$

* * *

Da hier $\mathfrak{M} = D$, $m=4$, $n=2$, $\delta=2$; ferner $\mu=2$, $\nu=3$, $\pi=8$, $\varrho=1$ also $\Sigma = 14$ ist, so ist das gesuchte Glied gleich ${}^{6}\overset{..rqp}{D} z^{18}$.

Es

Es ist aber $\;{}^{6}\overset{..rqp}{D} = \begin{array}{l} A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{c} \\ A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b} \\ A\,a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a} \\ A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \\ A\,b\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a} \\ A\,c\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \\ B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \\ B\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a} \\ B\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \\ C\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \end{array}$, folglich $\;{}^{6}\overset{..rqp}{D} z^{18} = \left.\begin{array}{l} A\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{c} \\ + A\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{b} \\ + A\,a\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a} \\ + A\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \\ + A\,b\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a} \\ + A\,c\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \\ + B\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \\ + B\,a\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a} \\ + B\,b\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \\ + C\,a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \end{array}\right| z^{18}$

§. 77.

5. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen zu bestimmen

$$\begin{array}{l} az^{a} + bz^{b} + cz^{c} + dz^{d} + \ldots = \pi \\ Az^{A} + Bz^{B} + Cz^{C} + Dz^{D} + \ldots = \varrho \\ \mathfrak{a}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{d}z^{\mathfrak{d}} + \ldots = \sigma \\ '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \end{array}$$

Auflösung.

Für den Zeiger $\left[\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ a & b & c & d\ldots = p \\ A & B & C & D\ldots = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d}\ldots = r \\ '' & '' & '' & '' \quad '' \end{array}\right]$

ist die allgemeine Form des Produkts diese:

$$ {}^{m}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{*} + {}^{m+1}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{*} + {}^{m+2}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{*} + {}^{m+3}\overset{..rqp}{\mathcal{M}} z^{*} + \ldots $$

Beweis.

Dass das angegebene Produkt in Rücksicht auf seine Coefficienten richtig sey, folgt schon aus einer Verglei-

chung der jetzigen Aufgabe mit den vorhergehenden; dass aber die Exponenten hier im allgemeinen mit * bezeichnet werden dürfen folgt aus §. 70 (δ. Bezeichn. der Exp.) sobald man die Wahrheit vor Augen hat, dass ein jeder Coefficient $^{m}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}$, $^{m+1}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}$, $^{m+2}\overset{..rqp}{\mathfrak{M}}$ u. s. f. eine Summe von Produkten ist, deren Factoren die Coefficienten der gegebenen Reihen sind.

1. *Beispiel.*

Es soll das Produkt der ersten drei Reihen der Aufgabe entwickelt werden.

* * *

Hier ist $\sigma\varrho\pi = {}^{3}\overset{rqp}{C}z^{*} + {}^{4}\overset{rqp}{C}z^{*} + {}^{5}\overset{rqp}{C}z^{*} + {}^{6}\overset{rqp}{C}z^{*} + {}^{7}\overset{rqp}{C}z^{*} + ..$

Es ist aber $^{3}\overset{rqp}{C} = \mathfrak{a}Aa$, $^{4}\overset{rqp}{C} = $

a	A	b
a	B	a
b	A	a

, $^{5}\overset{rqp}{C} = $

a	A	c
a	B	b
a	C	a
b	A	b
b	B	a
	A	a

$^{6}\overset{rqp}{C} = $

a	A	d
a	B	c
a	C	b
a	D	a
b	A	c
b	B	b
b	C	a
c	A	b
c	B	a
d	A	a

, u. s. w.

Folglich

folglich ist auch

$$\sigma\varrho\pi = \mathfrak{a}Aaz^{\mathfrak{a}+A+a} + \mathfrak{a}Abz^{\mathfrak{a}+A+b} + \mathfrak{a}Acz^{\mathfrak{a}+A+c}$$
$$+ \mathfrak{a}Baz^{\mathfrak{a}+B+a} + \mathfrak{a}Bbz^{\mathfrak{a}+B+b}$$
$$+ \mathfrak{b}Aaz^{\mathfrak{b}+A+a} + \mathfrak{a}Caz^{\mathfrak{a}+C+a}$$
$$+ \mathfrak{b}Abz^{\mathfrak{b}+A+b}$$
$$+ \mathfrak{b}Baz^{\mathfrak{b}+B+a}$$
$$+ \mathfrak{c}Aaz^{\mathfrak{c}+A+a}$$

$$+ \mathfrak{a}Adz^{\mathfrak{a}+A+d}$$
$$+ \mathfrak{a}Bcz^{\mathfrak{a}+B+c}$$
$$+ \mathfrak{a}Cbz^{\mathfrak{a}+C+b}$$
$$+ \mathfrak{a}Daz^{\mathfrak{a}+D+a}$$
$$+ \mathfrak{b}Acz^{\mathfrak{b}+A+c}$$
$$+ \mathfrak{b}Bbz^{\mathfrak{b}+B+b}$$
$$+ \mathfrak{b}Caz^{\mathfrak{b}+C+a}$$
$$+ \mathfrak{c}Abz^{\mathfrak{c}+A+b}$$
$$+ \mathfrak{c}Baz^{\mathfrak{c}+B+a}$$
$$+ \mathfrak{d}Aaz^{\mathfrak{d}+A+a}$$

§. 78.

6. *Aufgabe.*

Es soll das Produkt der hierunter befindlichen m Reihen angegeben werden.

$$av + bw + cx + \ldots\ldots = \pi$$
$$Av + Bw + Cx + \ldots\ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a}v + \mathfrak{b}w + \mathfrak{c}x + \ldots\ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A}v + \mathfrak{B}w + \mathfrak{C}x + \ldots\ldots = \tau$$
$$'' \quad '' \quad '' \quad ''$$

Auflösung.

Man suche das Produkt der Reihen, welche die Coefficienten für sich bilden, so erhält man die Coefficienten

enten des geſuchten Produkts. Ieden dieſer Coefficienten multiplicire man mit den veränderlichen Gröſsen wovon ſeine Factoren Coefficienten ſind, ſo hat man das verlangte Produkt der gegebenen Reihen.

Beweis.

Die Coefficienten der gegebenen Reihen machen, mit ihren veränderlichen Gröſsen multiplicirt, die Glieder jener Reihen aus, folglich entſteht auch das Produkt der Glieder, oder welches einerlei iſt, das Produkt der gegebenen Reihen, wenn man in dem Produkte der Reihen, welche die Coefficienten für ſich ausmachen, jeden einzelnen Theil mit den veränderlichen Gröſsen multiplicirt, von welchen die Factoren des einzelnen Theils die Coefficienten ſind.

Beiſpiel.

Die Coefficienten des Produkts der beiden erſten Reihen π und ρ ſind für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots = p \\ A, & B, & C, & D \ldots = q \end{array}\right\}$$

folgende: ${}^2\overset{qp}{B}$, ${}^3\overset{qp}{B}$, ${}^4\overset{qp}{B}$, ${}^5\overset{qp}{B}$, ${}^6\overset{qp}{B}$, ${}^7\overset{qp}{B}$, u. ſ. f.

Da nun ${}^2\overset{qp}{B} = Aa$; ${}^3\overset{qp}{B} = \begin{array}{l} A|b \\ Ba \end{array}$, ${}^4\overset{qp}{B} = \begin{array}{l} A|c \\ Bb \\ Ca \end{array}$, ${}^5\overset{qp}{B} = \begin{array}{l} A|d \\ Bc \\ Cb \\ Da \end{array}$

ſo iſt auch

$$\pi\rho = Aav^2 + \left.\begin{array}{l} Ab \\ +Ba \end{array}\right\} wv \begin{array}{l} + Acxv \\ + Bbw^2 \\ + Caxv \end{array} \begin{array}{l} + Adyv \\ + Bczw \\ + Cbxw \\ + Dayv \end{array} + \ldots$$

III. Com-

III. Combinatorische Entwickelung der Dignitäten.

§. 79.

1. *Aufgabe.*

Es soll $(a+b)^m$ entwickelt werden, aber unter der Voraussetzung, dass m eine gauze positive Zahl ist.

Auflösung.

Man suche für den Zeiger $\binom{1,\ 2}{a,\ b}$ die mte Klasse der Variationen mit Wiederholungen, so hat man das Verlangte, oder es ist

$$(a+b)^m = {}'\mathfrak{M}_{\binom{1,\ 2}{a,\ b}} = m\,{}'\mathfrak{M}_{\binom{1,\ 2}{a,\ b}}$$

Beweis.

Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so ist $(a+b)^m$ ein Produkt von m Factoren, deren ein jeder gleich $a+b$ ist. Die Multiplication solcher m Ausdrücke stimmt aber mit dem Variiren m gleicher Reihen überein (§. 71) und giebt daher eine mte Variationsklasse. Diese mte Variationsklasse ist aber nichts anders als die mte Klasse der Variationen mit Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2}{a,\ b}$, folglich gleich ${}'\mathfrak{M}_{\binom{1,\ 2}{a,\ b}} = m\,{}'\mathfrak{M}_{\binom{1,\ 2}{a,\ b}}$. (§. 66).

1. *Zusatz.*

Nach dem zweiten Zusatze zur dritten Auflösung der Aufgabe des §. 24. ist

$${}'J\,{}'\mathfrak{M}$$

$$'J'\mathfrak{M}_{\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}} \text{ oder schlechtweg } '\mathfrak{M}_{\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}} = a^m + a^{m-1}\,'A + a^{m-2}\,'B + \ldots$$

$$+ a^0\,'\mathfrak{M}_{\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}}.$$

Wendet man dieses auf $'\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}}$ an, so erhält man

$$'\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}} = a^m + a^{m-1}\,'A + a^{m-2}\,'B + a^{m-3}\,'C + \ldots + a^0\,'\mathfrak{M}_{\binom{2}{b}}$$

oder auch

$$'\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots + b^m.$$

Aus $'\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}}$ erhält man $m\,'\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}}$, wenn man in dem Werthe für $'\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}}$ jedes Glied mit der ihm zugehörigen Versetzungszahl (§. 20) multiplicirt, folglich ist $m\,\mathfrak{M}_{\binom{1,2}{a,b}}$ und daher auch

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 + \ldots + b^m.$$

2. *Zu-*

2. *Zusatz.*

1) Es lassen sich unter der Bedingung, dass m und n ganze positive Zahlen sind $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}}$ so entwickeln, dass man zwei Ausdrücke von einerlei Form erhält, d. h. die beiden Ausdrücke werden von der Beschaffenheit seyn, dass der eine so durch a, b, m und $\frac{1}{n}$ bestimmt wird, wie der andere durch a, b, und $\frac{1}{m}$; denn $(a+b)^m$ und $(a+b)^n$ haben, entwickelt, gewiss einerlei Form und folglich auch $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}}$ weil sich die Exponenten $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ bloss durch die Grösse der Nenner unterscheiden.

2) Es ist aber $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}} = (a+b)^{\frac{m}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}} = (a+b)^{\frac{n}{m}}$, daher ist einleuchtend, dass auch $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ und $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, wenn sie entwickelt werden, Formeln von einerlei Form geben werden. Ist aber dieses der Fall, so kann auch die Form der Formel für $\left((a+b)^{\frac{m}{n}}\right)^n$ nicht von der Form der Formel für $\left((a+b)^{\frac{n}{m}}\right)^n$ unterschieden seyn und folglich gilt dasselbe auch für $(a+b)^m$ und für $(a+b)^{\frac{n2}{m}}$, weil $\left((a+b)^{\frac{m}{n}}\right)^n = (a+b)^m$ und $\left((a+b)^{\frac{n}{m}}\right)^n = (a+b)^{\frac{n^2}{m}}$ ist.

3) Da

3) Da nun in $(a+b)^{\frac{n^2}{m}}$, n und m in jedem Verhältnisse gedacht werden können, so mag $n^2 = p$ aber kleiner oder grösser als m und daher $\frac{n^2}{m}$ oder $\frac{p}{m}$ eine eigentliche oder uneigentliche gebrochne Zahl seyn. Es haben also die Formeln für $(a+b)^m$ und $(a+b)^{\frac{p}{m}}$ einerlei Form, oder eben so wie die Formel für $(a+b)^m$ durch a, b und m bestimmt wird, wird auch die Formel für $(a+b)^{\frac{p}{m}}$ dnrch a, b und $\frac{p}{m}$ bestimmt, es mag $\frac{p}{m}$ eine eigentliche oder uneigentliche gebrochne Zahl seyn. Es ist also wenn unter $\frac{p}{m}$ irgend eine positive gebrochne Zahl gedacht wird,

$$(a+b)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} + \frac{p}{m}\, a^{\frac{p}{m}-1}\, b + \frac{\frac{p}{m}\cdot\left(\frac{p}{m}-1\right)}{1\cdot 2}\, a^{\frac{p}{m}-2}\, b^2 + \ldots$$

3. *Zusatz.*

1) Wenn man sich unter m wieder eine ganze positive Zahl denkt, so wird die Formel für $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ so durch a, b und $2m+1$ ausgedrückt, wie die Formel für $\frac{1}{(a+b)^m}$ durch a, b und m ausgedrückt wird. Denn diese beiden Formeln müssen einerlei Form haben, weil sich $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{1}{(a+b)^m}$ bloss durch die Exponen-

ten

ten $2m+1$ und m von einander unterſcheiden und dieſe doch nur durch die Gröſse von einander unterſchieden ſind.

2) Kommen aber die Formeln für $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{1}{(a+b)^{m}}$ in ihrer Form mit einander überein, ſo müſſen auch die Formeln für $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{m}}$ einerlei Form haben und aus dieſem Grunde auch die für $(a+b)^{-1}$ und $(a+b)^{m}$, weil $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{2m+1}} = (a+b)^{-1}$ und $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{m}} = (a+b)^{m}$ iſt.

3) Hat aber die Formel für $(a+b)^{-1}$ mit der für $(a+b)^{m}$ einerlei Form, ſo gilt dieſes auch für $((a+b)^{-1})^{p}$ und $((a+b)^{m})^{p}$ und deswegen wieder für $((a+b)^{-p})^{\frac{1}{q}}$ und $((a+b)^{mp})^{\frac{1}{q}}$. Es iſt aber $((a+b)^{-p})^{\frac{1}{q}} = (a+b)^{-\frac{p}{q}}$ und $((a+b)^{mp})^{\frac{1}{q}} = (a+b)^{\frac{mp}{q}}$, folglich haben auch die Formeln für $(a+b)^{-\frac{p}{q}}$ und $(a+b)^{\frac{mp}{q}}$ einerlei Form, es mag p mit q in einem Verhältniſſe ſtehn in welchem man will.

4) Da nun den Formeln für $(a+b)^{\frac{mp}{q}}$ und $(a+b)^{m}$ einerlei Form zukömmt, weil dieſes ſchon von ſelbſt klar

 iſt,

ist, wenn $\frac{mp}{q}$ eine ganze Zahl ist und durch den zweiten Zusatz dargethan wird, wenn $\frac{mp}{q}$ eine gebrochene Zahl ist, so ist einleuchtend, dass auch die Formel für $(a+b)^{-\frac{p}{q}}$ so durch a, b und $-\frac{p}{q}$ bestimmt wird, wie die Formel für $(a+b)^m$ durch a, b und m bestimmt ist und zwar es mag $\frac{p}{q}$ eine ganze oder gebrochne Zahl seyn.

Setzt man hier also $-\frac{p}{q} = -n$, so dass also unter n eine jede positive ganze und gebrochne Zahl gedacht werden darf, so ist

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} + \frac{-n}{1} a^{-n-1} + \frac{-n.(-n-1)}{1.\ 2} a^{-n-2} + ..$$

u. s. w.

4. Zusatz.

Iede Dignität des Binomiums hat die Form welche für $(a+b)^m$ im ersten Zusatze bestimmt ist, es mag der Exponent eine positive oder negative eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, oder es bleibt für einen jeden Werth, den man dem *m* giebt

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} + \text{ u. s. w. } a).$$

Willkührlicher Satz.

Die Binomialcoefficienten bezeichnet man mit grossen deutschen Buchstaben, denen man oben zur Linken den Expo-

a) Hingegen die Form, welche in der Auflösung der ersten Aufgabe angegeben wurde, findet nur statt, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist.

Exponenten der Dignität anhängt, so dass ${}^{m}\mathfrak{A}$ den zweiten, ${}^{m}\mathfrak{B}$ den dritten, ${}^{m}\mathfrak{C}$ den vierten, ${}^{m}\mathfrak{D}$ den fünften Binomialcoefficienten der mten Dignität anzeigt u. s. f.

Hiernach ist also

$$(a+b)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}b + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2 + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \ldots$$

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{A}a^{\frac{p}{q}-1}b + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}a^{\frac{p}{q}-2}b^2 + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{C}a^{\frac{p}{q}-3}b^3 + \ldots$$

$$(a+b)^{-r} = a^{-r} + {}^{-r}\mathfrak{A}a^{-r-1}b + {}^{-r}\mathfrak{B}a^{-r-2}b^2 + {}^{-r}\mathfrak{C}a^{-r-3}b^3 + \ldots$$

Der nte Binomialcoefficient wird durch $\mathfrak{N}$ angedeutet so dass also

$${}^m\mathfrak{N} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \ldots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots\ldots n-1}$$ ist. a).

5. *Zusatz.*

Es ist

$$(a+bz)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}bz + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2z^2 + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}b^3z^3 +$$

weil man diesen Ausdruck erhält, wenn man in

$$(a+b)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}b + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2 + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \ldots;$$

bz statt b setzt.

6. *Zusatz.*

Es ist $(az+bz^2)^m = ((a+bz)z)^m = (a+bz)^m z^m$, also auch

$$(az + bz^2)^m = (a^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}bz + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2z^2 + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}b^3z^3 + \ldots)z^m$$

$$= a^m z^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}bz^{m+1} + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2z^{m+2} + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}b^3z^{m+3} + \ldots$$

a) Man nimmt aber gewöhnlich zur Bezeichnung unbestimmter Binomialcoefficienten, Buchstaben eines Alphabets, welches von dem unterschieden ist, aus welchem man die bestimmten genommen hat.

§. 80.

2. Aufgabe.

Es soll die mte Dignität der Reihe $a+b+c+d+e+\ldots = p$ entwickelt werden, unter der Voraussetzung, dass m eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung.

Man erhält das Gesuchte wenn man $\overset{m}{\mathfrak{M}}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$ oder $m'\mathfrak{M}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$ entwickelt.

Beweis.

Die Richtigkeit der gegebenen Auflösung stützt sich auf die nämlichen Gründe, auf welchen die Richtigkeit der Auflösung der ersten Aufgabe beruhet.

Zusatz.

Da $m'\mathfrak{M}\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots} = m\,{}^{m}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+3}\mathfrak{M} + \ldots \binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$

so ist auch

$$(a+b+c+d+\ldots)^m = m\,{}^{m}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+3}\mathfrak{M} + \ldots \binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$$

Beispiel.

Es wird die dritte Dignität der $a+b+c+d+e+\ldots$ gesucht.

* * *

Es

Es ist $(a+b+c+d+e+..)^3 = {}_c{}^3C + {}_c{}^4C + {}_c{}^5C + {}_c{}^6C + {}_c{}^7C + \ldots$

$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4.. \\ a, b, c, d.. \end{pmatrix}$

Da nun nach §. 30.

^3C	^4C	^5C	^6C	^7C	
aaa,	aab,	a\|a\|c,	a\|a\|d,	a\|a\|e,	u. s. w.
		a\|b b	a\|b c	a\|b d	
			b b b	a\|c c	
				b b c	

so ist auch

$$(a+b+c+d+e+..)^m = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3a^2e + \ldots$$
$$+ 3ab^2 + 6abc + 6abd$$
$$+ b^3 \quad + 3ac^2$$
$$+ 3b^2c$$

§. 81.

3. *Aufgabe.*

Es wird für $(a+b+c+d+\cdots)^m$ eine Formel verlangt, welche paſst, es mag m eine Zahl seyn, was für eine man will.

Auflösung.

Es ist

$$(a+b+c+d+..)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}'A + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}'B + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}'C + \ldots$$

$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4.. \\ b, c, d, e.. \end{pmatrix}$

Beweis.

Es sey $(b+c+d+e+..) = S$, also $a+b+c+d+e+.. = a+S$ und daher $(a+b+c+d+e+...)^m = (a+S)^m$.

Soll nun hier m jede Zahl seyn können, so ist die Formel für $(a+S)^m$ diese:

$$(a+S)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}S + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}S^2 + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}S^3 + ..$$

Es ist aber nach §. 79, 1 Aufg. Aufl.

$$S = {}_a{}'A, \quad S^2 = {}_b{}'B, \quad S^3 = {}_c{}'C, \quad S^4 = {}_d{}'D, \text{ u. s. w.} \quad \binom{1,\ 2,\ 3,\ 4..}{b,\ c,\ d,\ e..}$$

folglich ist auch

$$(a+S)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}\,{}_a{}'A + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}\,{}_b{}'B + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}\,{}_c{}'C + \ldots \quad \binom{1,\ 2,\ 3,\ 4..}{b,\ c,\ d,\ e..}$$

Zusatz.

$$\text{Es ist } (a+b+c+d+..)^m \, 7 \, (n+1) = {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}\,{}_n{}'N. \quad \binom{1,\ 2,\ 3..}{b,\ c,\ d..}$$

1. *Beispiel.*

Es soll $a+b+c+d)^{\frac{2}{3}}$ entwickelt werden.

* * *

$$\text{Es ist } (a+b+c+d)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_a{}^{\frac{2}{3}-1}\,{}_a{}'A + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_a{}^{\frac{2}{3}-2}\,{}_b{}'B + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_a{}^{\frac{2}{3}-3}\,{}_c{}'C + \ldots \quad \binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d}$$

Con-

Construirt man hier die Klassen $'A, 'B, 'C$, nach §. 24. α) Rein combinatorische Aufl. so erhält man diese Figur:

b	c	d	$'A$
bb	bc	bd	
	cc	cd	$'B$
		dd	
bbb	bbc	bbd	
	bcc	bcd	$'C$
		bdd	
	ccc	ccd	
		cdd	
		ddd	

folglich ist, wenn man jede Complexion mit ihrer Versetzungszahl multiplieirt,

$$(a+b+c+d)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}(b+c+d) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\left(\begin{array}{l} b^2+2bc+2bd \\ \quad +c^2+2cd \\ \qquad +d^2 \end{array}\right) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\, a^{\frac{2}{3}-3}\left(\begin{array}{l} b^3+3b^2c+3b^2d \\ \quad +3bc^2+6bcd \\ \qquad +3bd^2 \\ \quad +c^3+3c^2d \\ \qquad +3cd^2 \\ \qquad +d^3 \end{array}\right) + \dots$$

$$= a^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}a^{\frac{2}{3}-1}(b+c+d) + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-1}{1\cdot 2}\, a^{\frac{2}{3}-2}\left(\begin{array}{l} b^2+2bc+2bd \\ \quad +c^2+2cd \\ \qquad +d^2 \end{array}\right)$$

$$+ \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{2}{3}-2}{1\cdot 2\cdot 3}\, a^{\frac{2}{3}-3}\left(\begin{array}{l} b^3+3b^2c+3b^2d \\ \quad +3bc^2+6bcd \\ \qquad +3bd^2 \\ \quad +c^3+3c^2d \\ \qquad +3cd^2 \\ \qquad +d^3 \end{array}\right) + \dots$$

2. Beispiel.

Es wird die Entwickelung des $(a+b+c+d)^{-7}\,75$ verlangt.

Dem Zusatze gemäſs ist

$$(a+b+c+d)^{-7}\,75 = {}^{-7}\mathfrak{D}\,a^{-11}\,{}_{b}{}'D$$

$$= \frac{-7.-8.-9.-10}{1.\;2.\;3.\;4}\,a^{-11}\,{}_{b}{}'D = -210\,a^{-11}\,{}_{b}{}'D_{\binom{1,\;2,\;3}{b,\;c,\;d}}$$

Es ist aber nach der zweiten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 24, $D_{\binom{1,\;2,\;3}{b,\;c,\;d}} = ♀$, folglich ist

auch $-210\,a^{-11}\,{}_{b}D_{\binom{1,\;2,\;3}{b,\;c,\;d}} = ♁$

♀				
	b	b	b	b
	b	b	b	c
	b	b	b	d
	b	b	c	c
	b	b	c	d
	b	b	d	d
	b	c	c	c
	b	c	c	d
	b	c	d	d
	b	d	d	d
	c	c	c	c
	c	c	c	d
	c	c	d	d
	c	d	d	d
	d	d	d	d

$$♁ = -210\,a^{-11}\left\{\begin{array}{l} b^4 \\ + 4b^3c \\ + 4b^3d \\ + 6b^2c^2 \\ + 12b^2cd \\ + 6b^2d^2 \\ + 4bc^3 \\ + 12bc^2d \\ + 12bcd^2 \\ + 4bd^3 \\ + c^4 \\ + 4c^3d \\ + 6c^2d^2 \\ + 4cd^3 \\ + d^4 \end{array}\right.$$

§. 81.

§. 82.

4. *Aufgabe.*

Es wird für $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^m = \pi^m$ eine Formel gesucht, und zwar für die Bedingung, dass m eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \pi^m = m\,{}^{m}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M}_z + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M}_{z^2} + m\,{}^{m+3}\mathfrak{M}_{z^3} + m\,{}^{m+4}\mathfrak{M}_{z^4} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4, 5 \ldots\\ a, b, c, d, e \ldots\end{matrix}\right)$$

Beweis.

Aus dem Produkte der *m* Reihen (§. 74).

$$\begin{matrix} a + bz + cz^2 + dz^3 + = \pi \\ A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + = \varrho \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + = \sigma \\ '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \end{matrix}$$

also aus $\overset{..rqp}{{}^{m}\mathfrak{M}} + \overset{...rqp}{{}^{m+1}\mathfrak{M}_z} + \overset{..rqp}{{}^{m+2}\mathfrak{M}_{z^2}} + \overset{...rqp}{{}^{m+3}\mathfrak{M}_{z^3}} + \overset{..rqp}{{}^{m+4}\mathfrak{M}_{z^4}} + \ldots,$

wird die mte Dignität der Reihe $a + bz + cz^3 + \ldots$, wenn sich eine jede der andern Reihen in diese eben genannte verwandelt. Folglich ist $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m$

$$= \overset{\cdot ppp}{{}^{m}\mathfrak{M}} + \overset{\cdot ppp}{{}^{m+1}\mathfrak{M}_z} + \overset{\cdot ppp}{{}^{m+2}\mathfrak{M}_{z^2}} + \overset{\cdot ppp}{{}^{m+3}\mathfrak{M}_{z^3}} + \ldots$$

$$= {}^{m}\mathfrak{M} + {}^{m+1}\mathfrak{M}_z + {}^{m+2}\mathfrak{M}_{z^2} + {}^{m+3}\mathfrak{M}_{z^3} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix}1, 2, 3 \ldots\\ a, b, c \ldots\end{matrix}\right)$$

$$= m\,{}^{m}\mathfrak{M} + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M}_z + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M}_{z^2} + n\,{}^{m+3}\mathfrak{M}_{z^3} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix}1, 2, 3 \ldots\\ a, b, c \ldots\end{matrix}\right)$$

1. *Zusatz.*

Es ist

$$\pi^m 7\,(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}_{z^n}, \text{ also } \pi^m 7\,(n+1)\,x = m^{m+n}\mathfrak{M}.$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3\,..}{a,\ b,\ c\,..}$$

Beispiel.

Es soll $(a+bz+cz^2+dz^3)^6\, 7\,5]$ entwickelt werden.

* * *

Da $(a+bz+cz^2+dz^3)^m 7\,(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}_{z^n}$ ist
$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$$

so ist auch $(a+bz+cz^2+dz^3)^6\, 7\,5 = f^{6+4}F_{z^4} = f^{10}F_{z^4}$.
$$\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}\ \binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}$$

Nach §. 33. ist aber

$$\underset{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}}{{}^{10}F} = \begin{matrix} 1\,1\,1\,1\,2\,4 \\ 1\,1\,1\,1\,3\,3 \\ 1\,1\,1\,2\,2\,3 \\ 1\,1\,2\,2\,2\,2 \end{matrix} = \begin{matrix} a\,a\,a\,a\,b\,d \\ a\,a\,a\,a\,c\,c \\ a\,a\,a\,b\,b\,c \\ a\,a\,b\,b\,b\,b \end{matrix}$$

$$\text{also } \underset{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}}{f^{10}F} = \left.\begin{matrix} 30a^4bd \\ +\ 15a^4c^2 \\ +\ 60a^3b^2c \\ +\ 15a^2b^4 \end{matrix}\right\}$$

§. 83.

3. *Aufgabe.*

Es soll $(az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots)^m = \pi^m$ unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass m eine positive ganze Zahl ist.

Auf-

Auflösung.

Es ist $\pi^{m} = m^{m}\mathfrak{M}z^{m} + m^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + m^{m+3}\mathfrak{M}z^{m+3} + \ldots$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ldots}$$

Beweis.

Es ist $(az + bz^{2} + cz^{3} + \ldots) = (a + bz + cz^{2} + \ldots)z$

also $(az + bz^{2} + cz^{3} + \ldots)^{m} = (a + bz + cz^{2} + \ldots)^{m}z^{m}$

Nun ist aber nach §. 82

$$(a + bz + cz^{2} + \ldots)^{m} = m^{m}\mathfrak{M} + m^{m+1}\mathfrak{M}z + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{2} + \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$$

folglich auch $(az + bz^{2} + cz^{3} + \ldots)^{m}$

$$= (m^{m}\mathfrak{M} + m^{m+1}\mathfrak{M}z + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{2} + \ldots)z^{m}$$

$$= m^{m}\mathfrak{M}z^{m} + m^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + m^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ldots}$$

3. *Zusatz.*

Es ist

$\pi^{m}\rceil(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}z^{m+n}$, also $\pi^{m}\rceil(n+1)\varkappa = m^{m+n}\mathfrak{M}$.

§. 83.

6. *Aufgabe.*

Es wird für $(a + bz + cz^{2} + dz^{3} + \ldots)^{m}$ eine Formel verlangt, die so beschaffen ist, dass unter m eine jede beliebige Zahl gedacht werden kann.

Auf-

Auflösung.

Es ist $(a+bz+cz^2+\ldots)^m$

$$= a^m + {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a{}^1A\,z + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a{}^2A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\,{}_b{}^2B \end{matrix}\right\} z^2 +$$

$$+ \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a{}^3A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\,{}_b{}^3B \\ + {}^m\mathfrak{C}_a^{m-3}\,{}_c{}^3C \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a{}^4A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\,{}_b{}^4B \\ + {}^m\mathfrak{C}_a^{m-3}\,{}_c{}^4C \\ + {}^m\mathfrak{D}_a^{m-4}\,{}_d{}^4D \end{matrix}\right\} z^4 + \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots}$$

Beweis.

Es sey $bz+cz^2+dz^3+\ldots = \Sigma$, so ist $a+bz+cz^2+dz^3+\ldots = a+\Sigma$ und daher $(a+bz+cz^2+dz^3+\ldots)^m = (a+\Sigma)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\Sigma^1 + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\Sigma^2 + {}^m\mathfrak{C}_a^{m-3}\Sigma^3 + \ldots$

Es ist aber nach §. 82

$$\begin{aligned}
\Sigma^1 &= {}_a{}^1A_z + {}_a{}^2A_{z^2} + {}_a{}^3A_{z^3} + {}_a{}^4A_{z^4} + \ldots \\
\Sigma^2 &= {}_b{}^2B_{z^2} + {}_b{}^3B_{z^3} + {}_b{}^4B_{z^4} + {}_b{}^5B_{z^5} + \ldots \\
\Sigma^3 &= {}_c{}^3C_{z^3} + {}_c{}^4C_{z^4} + {}_c{}^5C_{z^5} + {}_c{}^6C_{z^6} + \ldots \\
\Sigma^4 &= {}_d{}^4D_{z^4} + {}_d{}^5D_{z^5} + {}_d{}^6D_{z^6} + {}_d{}^7D_{z^7} + \ldots \\
'' \quad & \quad '' \quad\quad '' \quad\quad '' \quad\quad ''
\end{aligned}$$

folglich erhält man, wenn in der für $(a+\Sigma)^m$ entwickelten Formel, statt Σ, Σ^2, Σ^3, Σ^4 die hierfür eben angegebenen Werthe gesetzt werden, die Gleichung:

$(a+\Sigma)$

$$(a+\Sigma)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\left({}_a^1A z + {}_a^2A z^2 + {}_a^3A z^3 + \dots\right) +$$
$$\qquad {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\left({}_b^2B z^2 + {}_b^3B z^3 + {}_b^4B z^4 + \dots\right) +$$
$$\qquad {}^m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\left({}_c^3C z^3 + {}_c^4C z^4 + {}_c^5C z^5 + \dots\right) +$$

u. s. w. $\left(\begin{matrix}1, 2, 3, \dots \\ b, c, d, \dots\end{matrix}\right)$

Multiplicirt man nun hier die in Klammern eingeschlossenen einzelnen Ausdrücke mit dem davor stehenden Factor und ordnet dann die Glieder der dadurch entstandenen Reihe so, dass jedesmal die Glieder unter einander kommen, welche die nämliche Dignität der z enthalten, so entsteht offenbar die in der Auflösung aufgestellte Gleichung.

1. *Zusatz.*

Es ist $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots)^m \urcorner (n+1) =$

$$\left({}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,{}_a^nA + {}^m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,{}_b^nB + \dots + {}^m\mathfrak{N}\,a^{m-n}\,{}_n^1\mathfrak{N}\right) z^n$$
$$\left(\begin{matrix}1, 2, 3 \dots \\ b, c, d \dots\end{matrix}\right)$$

1. *Beispiel.*

Es soll $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \dots)^{\frac{2}{3}}$ entwickelt werden.

* * *

Es ist $(a + bz + cz^2 + \dots)^{\frac{2}{3}} =$

$$a^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}\,{}_a^1A z + \left.\begin{matrix}\tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}\,{}_a^2A \\ \tfrac{2}{3}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}\,{}_b^2B\end{matrix}\right| z^2$$

$+\frac{2}{3}\mathfrak{A}$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1}\,{}_{a}^{3}A \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}}-2}\,{}_{b}^{3}B \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_{a^{\frac{2}{3}}-3}\,{}_{c}^{3}C \end{array}\right\} z^3 \quad \left.\begin{array}{l} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1}\,{}_{a}^{4}A \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}}-2}\,{}_{b}^{4}B \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_{a^{\frac{2}{3}}-3}\,{}_{c}^{4}C \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}_{a^{\frac{2}{3}}-4}\,{}_{d}^{4}D \end{array}\right\} z^4 + \ldots,$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \ldots \\ b, & c, & d \ldots\end{matrix}\right)$$

Die Klassen, welche in jedem Gliede unter einander stehn, machen eine Klasseninvolution aus. Construirt man diese Klasseninvolutionen für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ b, & c, & d, & e \ldots\end{matrix}\right)$ nach der ersten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 29, so erhält man:

${}^1J$	${}^2J$	${}^3J$	${}^4J$	${}^5J$	u. s. w.
b	c	d	e	f	
	bb	bc	bd	be	
		bbb	cc	cd	
			bbc	bbd	
			bbbb	bcc	
				bbbc	
				bbbbb	

Substituirt man nun die einzelnen Klassen dieser Involutionen für die Klassenzeichen der aufgestellten Gleichung und giebt jeder Complexion die ihr zugehörige Versetzungszahl, so wird:

$$(a + bz + cz^2 + \cdots)^{\frac{2}{3}} =$$

$$a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1} bz + \left.\begin{array}{l} {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1} c \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}}-2} b^2 \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1} d \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}}-2} 2bc \\ + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_{a^{\frac{2}{3}}-3} b^3 \end{array}\right\} z^3$$

$$+ {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}e \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}(2bd+c^2) \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}3b^2c \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}\,a^{\frac{2}{3}-4}b^4
\end{array}\right| z^4 +
\left.\begin{array}{l}
{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}f \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}(2be+2cd) \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}(3b^2d+3bc^2) \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}\,a^{\frac{2}{3}-4}4b^3c \\
+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{E}\,a^{\frac{2}{3}-5}b^4
\end{array}\right| z^5 + \ldots
$$

Werden hier nun noch die Binomialcoefficienten entwickelt, so hat man das Verlangte.

Anmerkung.

Es war gar nicht nöthig, wie vorhin geschehn ist, **fünf** einzelne Klasseninvolutionen zu construiren, sondern die Construction der einzigen ${}^5J$ war schon hinreichend, weil sie die vorhergehenden mit in sich begreift. (§. 29, α) Rein comb. Aufl. 1 Anmerkung). Man hätte auch statt der Klasseninvolution eine lexicographische wählen (§. 29, β) Rein comb. Aufl.) oder die Klassen unmittelbar aus der Figur pag. 101 nehmen können. (§. 29, β. Rein comb. Aufl. 6. Zus.).

2. *Beispiel.*

Es wird $(a+bz+cz^2dz^3)^{-4/6}$ gesucht.

* * *

Nach dem ersten Zusatze ist $(a+bz+cz^2+dz^3)^{-4/6} =$

$$
({}^{-4}\mathfrak{A}\,a^{-5}\,{}_{a}{}^{5}A + {}^{-4}\mathfrak{B}\,a^{-6}\,{}_{b}{}^{5}B + {}^{-4}\mathfrak{C}\,a^{-7}\,{}_{c}{}^{5}C + {}^{-4}\mathfrak{D}\,a^{-8}\,{}_{d}{}^{5}D + {}^{-4}\mathfrak{E}\,a^{-9} + {}_{e}{}^{5}E)\,z^{-5}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ b, & c, & d \end{pmatrix}
$$

Für

Für den Zeiger $\binom{1, \;\; 3}{b,\ c,\ d}$ giebt es keine ${}^{5}A$, die übrigen Klassen finden aber statt und zwar es ist

$${}^{5}B = cd,\ {}^{5}C = \begin{matrix} bbd, \\ bcc \end{matrix}\ {}^{5}D = bbbc,\ {}^{5}E = bbbbb.$$

Daher $(a+bz+cz^2+dz^3)^{-4}$ 57

$$= \left({}^{-4}\mathfrak{B}_{a^{-6}} 2cd + {}^{-4}\mathfrak{C}_{a^{-7}}(3b^2d + 3bc^2) + {}^{-4}\mathfrak{D}_{a^{-8}} 4b^3c + {}^{-4}\mathfrak{E}_{a^{-9}} b^5\right) z^{-5}.$$

$$= \left(20a^{-6}cd - 60a^{-7}(b^2d + bc^2) + 140a^{-8}b^3c - 56a^{-9}b^5\right) z^{-5}.$$

2. *Zusatz.*

Da im ersten Zusatze unter m eine jede Zahl gedacht werden darf, so findet auch zwischen dem dort aufgestellten Werthe des n+1ten Gliedes und zwischen dem Werthe, der im Zusatze des §. 82 angegeben ist eine Gleichung statt. Es ist nämlich unter der Bedingung, dass m eine ganze positive Zahl ist

$$m^{m+n}\mathfrak{M}_{2^n} = \left({}^{m}\mathfrak{A}_{a^{m-1}}\, {}_{a}{}^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}_{a^{m-2}}\, {}_{b}{}^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}_{a^{m-3}}\, {}_{c}{}^{n}C + \cdots + {}^{m}\mathfrak{N}_{a^{m-n}}\, {}_{n}{}^{n}\mathfrak{N}\right) z^{n}.$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3, \ldots}{a,\ b,\ c, \ldots} \qquad \binom{1,\ 2,\ 3, \ldots}{b,\ c,\ d, \ldots}$$

Ist hier $n > m$, so bricht der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitzeichens mit ${}^{m}\mathfrak{M}\ m^{m}\mathfrak{M}$ ab.

Anmerkung.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung durch z^n und denkt sich die Polynomial- und Binomialcoefficienten weg, so erhält man

$$ {}^{n+m}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}} = a^{m-1}\,{}^{n}\mathfrak{A} + a^{m-2}\,{}^{n}\mathfrak{B} + a^{m-3}\,{}^{n}\mathfrak{C} + \ldots + a^{m-n}\,{}^{n}\mathfrak{N}_{\binom{1,\,2,\,3\,..}{b,\,c,\,d\,..}}. $$

Diese Gleichung ist für ${}^{n+m}\mathfrak{M}_{\binom{1,\,2,\,3\,...}{a,\,b,\,c\,...}}$ die nämliche, welche die im zweiten Zusatze des §. 30 zuletzt aufgestellte für ${}^{r+n}\mathfrak{N}_{\binom{1,\,2,\,3\,..}{a,\,b,\,c\,..}}$ ist, und daher sind in der Gleichung des zweiten Zusatzes die Ausdrücke ${}^{m}\mathfrak{A}_{a}$, ${}^{m}\mathfrak{B}_{b}$, ${}^{m}\mathfrak{C}_{c}$, ${}^{m}\mathfrak{D}_{d}$ u. s. f. nichts anders als die Polynomialcoefficienten, welche der Ausdruck ${}^{m+n}_{\;m}\mathfrak{M}$ durch seinen Coefficienten m anzeigt.

§. 85.

7. *Aufgabe.*

Es wird für $(az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ..)^m$ eine Formel gesucht und zwar unter der Bedingung, dass unter m eine jede ganze und gebrochne, sowohl positive als uegative Zahl, gedacht werden darf.

Auflösung.

Es ist $(az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots)^m =$

$$a^m z^m + {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a^1A\,z^{m+1} + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a^2A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\,{}_b^2B \end{matrix}\right\} z^{m+2}$$

$$\left.\begin{matrix} + {}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a^3A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\,{}_b^3B \\ + {}^m\mathfrak{C}_a^{m-3}\,{}_c^3C \end{matrix}\right\} z^{m+3} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ b, & c, & d, & e \ldots \end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots = (a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)z$.
folglich $(az + bz^2 + cz^3 dz^4 + \ldots)^m = (a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m z^m$,

Man erhält also das Verlangte, wenn man die Formel, welche in der Auflösung der 6ten Aufgabe angegeben ist, mit z^m multiplicirt. Geschieht aber dieses, so bekömmt man die Formel der eben gegebenen Auflösung folglich ist diese auch die richtige.

Zusatz.

$(az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^m 7 (n+1) =$

$$\left({}^m\mathfrak{A}_a^{m-1}\,{}_a^nA + {}^m\mathfrak{B}_a^{m-2}\,{}_b^nB + {}^m\mathfrak{C}_a^{m-3}\,{}_c^nC + {}^m\mathfrak{D}_a^{m-4}\,{}_b^nD + \ldots + {}^m\mathfrak{N}_a^{m-n}\,{}_n^n\mathfrak{N}\right) z^{m+n}.$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ b, & c, & d, & e \ldots \end{pmatrix}$$

§. 86.

8. Aufgabe.

Es soll $q^m = (az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m$ für den Fall entwickelt werden, daß unter m nur eine positive ganze Zahl gedacht wird.

Auflösung.

Es ist $q^m = (az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + ..)^m =$
$$ {}_m{}^m\mathfrak{M}z^{m\mu} + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z^{m\mu+\delta} + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^{m\mu+2\delta} + {}_m{}^{m+3}\mathfrak{M}z^{m\mu+3\delta} + \ldots .. $$
$$\left(\begin{matrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots\end{matrix}\right)$$

Beweis.

Es ist $az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + .. =$
$(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + ..)z^\mu$,
alſo auch $(az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + ..)^m =$
$(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + ..)^m z^{m\mu}$.

Vergleicht man $a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + ..$ mit $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, ſo erhellet, daſs $a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots$ entſteht, wenn man in $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, z^δ ſtatt z, $z^{2\delta}$ ſtatt z^2, $z^{3\delta}$ ſtatt z^3 ſchreibt u. ſ. w. Aus dieſem Grunde muſs man aus $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ..)^m$ auch $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \cdots)^m$ erhalten, wenn man darinn z^δ für z, $z^{2\delta}$ für z^2, $z^{3\delta}$ für z^3 ſubſtituirt u. ſ. f.

Da alſo $(a + bz + cz^2 + \ldots)^m =$
$$ {}_m{}^m\mathfrak{M} + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^2 + {}_m{}^{m+3}\mathfrak{M}z^3 + .. \text{ (§. 82)} $$
$$\left(\begin{matrix}1, 2, 3, .. \\ a, b, c, ..\end{matrix}\right)$$

so ist $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)^m =$

$$ {}_{m}{}^{m}\mathfrak{M} + {}_{m}{}^{m+1}\mathfrak{M} z^{\delta} + {}_{m}{}^{m+2}\mathfrak{M} z^{2\delta} + {}_{m}{}^{m+3}\mathfrak{M} z^{3\delta} + \ldots $$
$$ \binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ \ldots} $$

und deswegen $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)^m z^{m\mu} =$

$$ {}_{m}{}^{m}\mathfrak{M} z^{m\mu} + {}_{m}{}^{m+1}\mathfrak{M} z^{m\mu+\delta} + {}_{m}{}^{m+2}\mathfrak{M} z^{m\mu+2\delta} + \ldots $$
$$ \binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ \ldots} $$

Zusatz.

$q^m 7(n+1) = {}_{m}{}^{m+n}\mathfrak{M} z^{m\mu+n\delta}$ und daher

$q^m 7(n+1) \varkappa = {}_{m}{}^{m+n}\mathfrak{M}$.

Beispiel.

Es wird das 6te Glied der $(az^3 + bz^5 + cz^7 + dz^9 + \ldots)^3$ gesucht.

* * *

Hier ist $m = 3$, $\mathfrak{M} = C$, $\mu = 3$, $\delta = 2$, $n = 5$; folglich das gesuchte Glied gleich ${}_{c}{}^{8}C z^{19}$. Es ist aber ${}^{8}C$ $\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{a,\ b,\ c\ \ldots}$ $\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{a,\ b,\ e\ \ldots}$ $=$ a|a f, a|b e, a|c d, b|b d, b|c c

also auch $\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots}{a,\ b,\ c\ \ldots}}{{}_{c}{}^{8}C z^{19}} = \left.\begin{matrix} 3a^2f \\ +6abe \\ +6acd \\ +3b^2d \\ +3bc^2 \end{matrix}\right\} z^{19}.$

§. 86.

§. 87.

9. Aufgabe.

Es wird für $p^m = (az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m$ eine Formel gesucht, die für jeden Exponenten m paſst, er mag eine ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahl seyn.

Auflöſung.

Es iſt

$$p^m = a^m z^{m\mu} + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^1A\, z^{m\mu+\delta} + \left\{\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^2A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^2B \end{matrix}\right\} z^{m\mu+2\delta}$$

$$+ \left\{\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^3A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^3B \\ + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^3C \end{matrix}\right\} z^{m\mu+3\delta} + \left\{\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^4A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^4B \\ + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^4C \\ + {}^m\mathfrak{D}_a{}^{m-4}{}_b{}^4D \end{matrix}\right\} z^{m\mu+4\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ b, c, d, e, \ldots \end{matrix}\right)$$

Beweis.

Es iſt $(az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + \ldots)^m = (a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)^m z^{m\mu}$ (§. 85. Aufl.).

Da nun aus $(a + bz + cz^2 + \ldots)$ die Reihe $(a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)$ wird, wenn man z^{δ} für z, $z^{2\delta}$ für z^2 ſetzt u. ſ. w. ſo iſt klar, daſs man die geſuchte Formel erhält, wenn man in der Formel der Auflöſung der 6ten Aufgabe die eben genannte Subſtitution vornimmt und hierauf den hierdurch erhaltenen Ausdruck mit $z^{m\mu}$ multiplicirt. Nimmt man aber dieſe Operation vor, ſo bekömmt man die gegebene

gebene Auflösung der 9ten Aufgabe, folglich ist diese Auflösung auch die richtige.

Zusatz.

$$p^m 7(n+1(= ({}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}\,{}_a^nA + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}\,{}_b^nB + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}\,{}_c^nC + \ldots + {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}\,{}_n^n\mathfrak{N})_z{}^{m\mu+n\delta}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{b,\ c,\ d,\ e\ldots}$$

Beispiel.

Es soll $(az^5 + bz^3 + cz^1 + dz^{-1} + ez^{-3} + \ldots)^{\frac{2}{3}}77 = q^{\frac{2}{3}}77$ entwickelt werden.

* * *

Hier ist $m = \frac{2}{3}$, $\mu = 5$, $\delta = -2$, $n = 6$, $\mathfrak{N} = F$, und folglich

$$q^{\frac{2}{3}}77 = {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_a{}^{\frac{2}{3}-1}\,{}_a^6A + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_a{}^{\frac{2}{3}-2}\,{}_b^6B + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_a{}^{\frac{2}{3}-3}\,{}_c^6C + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}_a{}^{\frac{2}{3}-4}\,{}_d^6D + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{E}_a{}^{\frac{2}{3}-5}\,{}_e^6E + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{F}_a{}^{\frac{2}{3}-6}\,{}_f^6F)_z{}^{-\frac{26}{3}}.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}$$

Da nun $\underset{\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{b,\ c,\ d\ldots}}{{}^6J} = $

$$\begin{array}{rl} g & {}^6A \\ \overline{bf} & \\ ce & {}^6B \\ dd & \\ \overline{bbe} & {}^6C \\ bcd & \\ ccc & \\ \overline{bbbd} & {}^6D \\ bbcc & \\ \overline{bbbbc} & {}^6E \\ \overline{bbbbbb} & {}^6F \end{array}$$

so ist auch

$$q^{\frac{2}{3}77} = \left({}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}-1}} g + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}-2}} (2bf + 2ce + d^2) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_{a^{\frac{2}{3}-3}} (3b^2e + 6bcd + c^3) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}_{a^{\frac{2}{3}-4}} (4b^3d + 6b^2c^2) + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{E}_{a^{\frac{2}{3}-5}}\, 5b^4c + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{F}_{a^{\frac{2}{3}-6}}\, b^6 \right) z^{-\frac{26}{3}}.$$

§. 88.

10. *Aufgabe.*

Für die mte Dignität der Reihe $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + .. = p$ eine Formel anzugeben, die unter der Voraussetzung richtig ist, dass man sich unter m nur eine positive ganze Zahl denkt.

Auflösung.

Es ist $p^m = {}_m{}^m\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+1}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+2}\mathfrak{M}z^* + {}_m{}^{m+3}\mathfrak{M}z^* + \ldots\ldots$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, .. \\ A, & B, & C, & D, .. \end{matrix} \right)$$

Beweis.

Es ist hier p^m ein Produkt aus m Factoren deren ein jeder gleich $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + ..$ ist, folglich ist auch (§. 77) hier

$$p^m = {}^{m}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+1}\overset{...ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+2}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+3}\overset{...ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+4}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + {}^{m+5}\overset{..ppp}{\mathcal{M}}z^* + \ldots\ldots$$

$$= m\,{}^{m}\mathfrak{M}z^* + m\,{}^{m+1}\mathfrak{M}z^* + m\,{}^{m+2}\mathfrak{M}z^* + m\,{}^{m+3}\mathfrak{M}z^* + {}^{m+4}\mathfrak{M}z^* + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, .. \\ A, & B, & C, & D, .. \end{matrix} \right)$$

 Zu-

3. Zusatz.

Es ist

$$p^m 7(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M} z^* \text{ und daher } \pi^m 7(n+1)\kappa = m^{m+n}\mathfrak{M}$$

Beispiel.

Es soll $p^5 78$ angegeben werden.

$$\text{Da hier } m = 5 \text{ und } n = 7 \text{ ist, so ist } p^5 78 = e^{12}\mathrm{E} \overset{*\quad * \quad *}{z} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots \\ A, & B, & C \ldots \end{pmatrix}$$

Es ist aber $^{12}\mathrm{E}$, also auch $p^5 78$

$^{12}\mathrm{E}$ =	$p^5 78$ =
A A A A H	$5A^4Hz^{4a+h}$
A A A B G	$+\ 20A^3BGz^{3a+b+g}$
A A A C F	$+\ 20A^3CFz^{3a+c+f}$
A A A D E	$+\ 20A^3DEz^{3a+d+e}$
A A B B F	$+\ 30A^2B^2Fz^{2a+2b+f}$
A A B C E	$+\ 60A^2BCEz^{2a+b+c+e}$
A A B D D	$+\ 30A^2BD^2z^{2a+b+2d}$
A A C C D	$+\ 30A^2C^2Dz^{2a+2c+d}$
A B B B E	$+\ 20AB^3Ez^{a+3b+e}$
A B B C D	$+\ 60AB^2CDz^{a+2b+c+d}$
A B C C C	$+\ 20ABC^3z^{a+b+3c}$
B B B B D	$+\ 5B^4Dz^{4b+d}$
B B B C C	$+\ 10B^3C^2z^{3b+2c}$

Anmerkung.

Dass die Werthe des * in $e^{12}\mathrm{E}z^*$ hier richtig bestimmt sind erhellet aus §. 70 δ).

§. 89.

§. 89.

11. *Aufgabe.*

Für $(Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \dots)^m = q^m$ unter der Bedingung eine Formel anzugeben, daſs unter m ſowohl eine poſitive als negative, ſowohl eine ganze als gebrochne Zahl gedacht werden darf.

Auflöſung.

Es iſt $q^m = A^m z^{ma} +$

$$
{}^m\mathfrak{A} A^{m-1} z^{(m-1)a} \left| \begin{array}{l} {}_a{}^1A_{z^*} \\ + {}_a{}^2A_{z^*} \\ + {}_a{}^3A_{z^*} \\ + {}_a{}^4A_{z^*} \\ + {}_a{}^5A_{z^*} \\ \text{'' '' ''} \end{array} \right. + {}^m\mathfrak{B} A^{m-2} z^{(m-2)a} \left| \begin{array}{l} {}_b{}^2B_{z^*} \\ + {}_b{}^3B_{z^*} \\ + {}_b{}^4B_{z^*} \\ + {}_b{}^5B_{z^*} \\ + {}_b{}^6B_{z^*} \\ \text{'' '' ''} \end{array} \right.
$$

$$
+ {}^m\mathfrak{C} A^{m-3} z^{(m-3)a} \left| \begin{array}{l} {}_c{}^3C_{z^*} \\ + {}_c{}^4C_{z^*} \\ + {}_c{}^5C_{z^*} \\ + {}_c{}^6C_{z^*} \\ + {}_c{}^7C_{z^*} \\ \text{'' '' ''} \end{array} \right. + {}^m\mathfrak{D} A^{m-4} z^{(m-4)a} \left| \begin{array}{l} {}_d{}^4D_{z^*} \\ + {}_d{}^5D_{z^*} \\ + {}_d{}^6D_{z^*} \\ + {}_d{}^7D_{z^*} \\ + {}_d{}^8D_{z^*} \\ \text{'' '' ''} \end{array} \right.
$$

u. ſ. w. $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\,..}{B,\ C,\ D,\ E\,..}$

Beweis.

Es ſey $(Bz^b + Cz^c + Dz^d + ..)^m = Z$, ſo iſt $q^m = (Az^a + Z)^m$, alſo

$$
= A^m z^{ma} + {}^m\mathfrak{A} A^{m-1} z^{(m-1)a} Z^1 + {}^m\mathfrak{B} A^{m-2} z^{(m-2)a} Z^2 + {}^m\mathfrak{C} A^{m-3} z^{(m-3)} Z^3 + \dots
$$

 Da

Da nun nach §. 87.

$$z^1 = {}_a^1A_{z^*} + {}_a^2A_{z^*} + {}_a^3A_{z^*} + {}_a^4A_{z^*} + {}_a^5A_{z^*} + \cdots$$
$$z^2 = {}_b^2B_{z^*} + {}_b^3B_{z^*} + {}_b^4B_{z^*} + {}_b^5B_{z^*} + {}_b^6B_{z^*} + \cdots$$
$$z^3 = {}_c^3C_{z^*} + {}_c^4C_{z^*} + {}_c^5C_{z^*} + {}_c^6C_{z^*} + {}_c^7C_{z^*} + \cdots$$
$$z^4 = {}_d^4D_{z^*} + {}_d^5D_{z^*} + {}_d^6D_{z^*} + {}_d^7D_{z^*} + {}_d^8D_{z^*} + \cdots$$
$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃}$$
$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ B, & C, & D, & E \ldots\end{matrix}\right)$$

so ist einleuchtend, daſs die gegebene Auflösung richtig ist, weil ihre Formel entsteht, wenn man in der Formel für $(Az^a + Z)^m$ statt Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, u. s. f. die hierfür eben entwickelten Werthe substituirt.

Zusatz.

Es ist $(Az^a + Bz^b + Cz^c + \ldots)^m ⁊ (n+1) =$

$$ {}^m\mathfrak{N} A^{(m-n)} z^{(m-n)a} \left[\begin{matrix} + {}_n^n\mathfrak{N}_{z^*} \\ + {}_n^{n+1}\mathfrak{N}_{z^*} \\ + {}_n^{n+2}\mathfrak{N}_{z^*} \\ + {}_n^{n+3}\mathfrak{N}_{z^*} \\ \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \end{matrix}\right.$$
$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \ldots \\ B, & C, & D \ldots\end{matrix}\right)$$

Beispiel.

Es soll $(Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots)^{-3} = p^{-3}$ entwickelt werden.

* * *

Die hierhergehörige allgemeine Formel entsteht aus der Formel der Auflösung, wenn man darinn statt m, -3 setzt.

ſetzt. Um die Klaſſen zu entwickeln dient hier vorzüglich die lexicographiſche Involution:

B	B	B	B	B	B	B	B	1
B	B	B	B	B	B	C	2	
B	B	B	B	B	D	3		
B	B	B	B	C	C	4		
B	B	B	B	E				
B	B	B	C	D	5			
B	B	B	F					
B	B	C	C	C				
B	B	C	E					
B	B	D	D	6				
B	B	G						
B	C	C	D					
B	C	F						
B	D	E	7					
B	H							
C	C	C	C					
C	C	E						
C	D	D						
C	G							
D	F							
E	E	8						
I								

Nimmt man hieraus die einzelnen Klaſſen und giebt jeder Complexion den ihr zugehörigen Polynomialcoefficienten, ſo wird $p^{-3} =$

$$A^{-3}z^{-3a} + {}^{-3}\mathfrak{A}\,A^{-4}z^{-4a}\left\{\begin{array}{l} Bz^{b} \\ +Cz^{c} \\ +Dz^{d} \\ +Ez^{e} \\ \;\;'' \end{array}\right. + {}^{-3}\mathfrak{B}\,A^{-5}z^{-5a}\left\{\begin{array}{ll} B^2z^{2b} & \\ +2BCz^{b+c} & \\ +2BDz^{b+d} & +C^2z^{2c} \\ +2BEz^{b+e} & +2CDz^{c+d} \\ \;\;'' & \;\;'' \end{array}\right.$$

$$+ {}^{-3}\mathfrak{C}\,A^{-6}z^{-6a}\left\{\begin{array}{lll} B^3z^{3b} & & \\ +3B^2Cz^{2b+c} & & \\ +3B^2Dz^{2b+d} & +3BC^2z^{b+2c} & \\ +3B^2Ez^{2b+e} & +6BCDz^{b+c+d} & +C^3z^{3c} \\ \;\;'' & \;\;'' & \;\;'' \end{array}\right.$$

${}^{-3}\mathfrak{D}$

$$+{}^{-3}\mathfrak{D}A^{-7a}\left\{\begin{array}{l} B^4z^{4b} \\ +4B^3Cz^{3b+c} \\ +4B^3Dz^{3b+d}+6B^2C^2z^{2b+2c} \\ +4B^3Ez^{3b+e}+12B^2CDz^{2b+c+d}+4BC^3z^{b+3c} \\ \quad '' \qquad\qquad '' \qquad\qquad '' \end{array}\right.$$

u. f. w. u. f. w.

Anmerkung.

Hat eine gegebene Reihe eine bestimmte Anzahl z. B. n+1 Glieder, so hat die höchste Union für den Zeiger $\binom{1,2,3,4\,..\,n}{b,c,d,e\,..\,p}$ die Summe n, die höchste Binion besitzt die Summe 2n, die höchste Ternion die Summe 3n u. s. w. Construirt man also in diesem Falle z. B. eine lexicographische Involution zur Summe 3n, so sind alle Binionen darinn unnütze, welche eine grösere Summe haben als 2n beträgt und alle Unionen sind unnütze, welchen eine grösere Summe zukömmt als n ausmacht. Es soll daher in der Folge noch eine Methode angegeben werden die lexicographische Involution so abzukürzen, dass sie bei einer begrenzten Reihe die unnützen Complexionen übergeht.

IV. Combinatorische Entwickelung der Produkte der Dignitäten mehrerer Reihen.

§. 90.

1. *Aufgabe.*

Es sind m Reihen, p, q, r, s u. s. w. gegeben, deren eine jede z enthält und die Form $a+bz+cz^2+dz^3+..$ hat, es soll das Produkt der Dignitäten p^b, q^c, r^d, s^e u. s. f. bestimmt werden.

Auf-

Auflösung.

Es ist für den Zeiger

$$\left[\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ p^b\varkappa 1, & p^b\varkappa 2, & p^b\varkappa 3, & p^b\varkappa 4 \ldots & = \pi \\ q^c\varkappa 1, & q^c\varkappa 2, & q^c\varkappa 3, & q^c\varkappa 4 \ldots & = \varrho \\ r^d\varkappa 1, & r^d\varkappa 2, & r^d\varkappa 3, & r^d\varkappa 4 \ldots & = \sigma \\ s^e\varkappa 1, & s^e\varkappa 2 & s^e\varkappa 3, & s^e\varkappa 4 \ldots & = \tau \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} \end{array}\right]$$

$$\ldots s^e r^d q^c p^b = {}^{m}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathfrak{M}}z + {}^{m+2}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathfrak{M}}z^2 + {}^{m+3}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathfrak{M}}z^3 + \ldots$$

Beweis.

Eine jede der Reihen p^b, q^c, r^d, s^e hat nach §. 82 und §. 84 die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$

Man kann also setzen

$$\begin{array}{lll} p^b & = & p^b\varkappa 1 + p^b\varkappa 2.z + p^b\varkappa 3.z^2 + p^b\varkappa 4.z^3 + p^b\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots \\ q^c & = & q^c\varkappa 1 + q^c\varkappa 2.z + q^c\varkappa 3.z^2 + q^c\varkappa 4.z^3 + q^c\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots \\ r^d & = & r^d\varkappa 1 + r^d\varkappa 2.z + r^d\varkappa 3.z^2 + r^d\varkappa 4.z^3 + r^d\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots \\ s^e & = & s^e\varkappa 1 + s^e\varkappa 2.z + s^e\varkappa 3.z^2 + s^e\varkappa 4.z^3 + s^e\varkappa 5.z^4 + \ldots\ldots, \\ & & \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \end{array}$$

Das Produkt dieser m Reihen erhält man aber, wenn man aus ihren Coefficienten so einen Zeiger bildet, wie in der Auflösung angegeben ist und hierfür die Klassen ${}^{m}\mathfrak{M}$, ${}^{m+1}\mathfrak{M}$, ${}^{m+2}\mathfrak{M}$, ${}^{m+3}\mathfrak{M}$ u. s. f. entwickelt und ${}^{m+1}\mathfrak{M}$ mit z, ${}^{m+2}\mathfrak{M}$ mit z^2, ${}^{m+3}\mathfrak{M}$ mit z^3 mul-

multiplicirt u. f. w. (§. 74) folglich ist auch das in der Auflösung aufgestellte Produkt richtig.

1. Zusatz.

Es ist $\ldots s^e r^d q^c p^b 7 (n+1) = {}^{m+n}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}_{z^n}$, also

$$\ldots s^e r^d p^c q^b 7 (n+1)\varkappa = {}^{m+n}\overset{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}.$$

2. Zusatz.

$$\text{Es ist } p^b q^c = {}^2\overset{\varrho\pi}{B} + {}^3\overset{\varrho\pi}{B}_z + {}^4\overset{\varrho\pi}{B}_{z^2} + {}^5\overset{\varrho\pi}{B}_{z^3} + {}^6\overset{\varrho\pi}{B}_{z^4} + \ldots$$

$$= q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 + \left.\begin{array}{l} q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 2 \\ + q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 1 \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 3 \\ + q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 2 \\ + q^c\varkappa 3 . p^b\varkappa 1 \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 4 \\ + q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 3 \\ + q^c\varkappa 3 . p^b\varkappa 2 \\ + q^c\varkappa 4 . p^b\varkappa 1 \end{array}\right\} z^3 + \ldots$$

3. Zusatz.

$$\text{Es ist } r^d q^c p^b = {}^3\overset{\sigma\varrho\pi}{C} + {}^4\overset{\sigma\varrho\pi}{C}_z + {}^5\overset{\sigma\varrho\pi}{C}_{z^2} + {}^6\overset{\sigma\varrho\pi}{C}_{z^3} + {}^7\overset{\sigma\varrho\pi}{C}_{z^4} + {}^8\overset{\sigma\varrho\pi}{C}_{z^5} + \ldots$$

$$= r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 + \left.\begin{array}{l} r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 2 \\ + r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 1 \\ + r^d\varkappa 2 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 3 \\ + r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 2 . p^d\varkappa 2 \\ + r^d\varkappa 1 . q^c\varkappa 5 . p^b\varkappa 1 \\ + r^d\varkappa 2 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 2 \\ + r^d\varkappa 2 . q^c\varkappa 2 . p^b\varkappa 1 \\ + r^d\varkappa 3 . q^c\varkappa 1 . p^b\varkappa 1 \end{array}\right\} z^2$$

u. f. w. u. f. w.

1. Anmerkung.

Aus den letzten beiden Zusätzen wird hinreichend erhellen, wie leicht man die Produkte durch das

das Localzeichen $\varkappa$ ausdrücken kann Werden in solchen Localausdrücken, die Coefficienten selbst, für ihre Stellvertreter gesetzt, welches gar keine Schwierigkeiten macht, so hat man das Produkt vollständig entwickelt.

Beispiel. a).

Es sey $p^2 = (a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \cdots)^2$

und $p^3 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots)^3$

Es soll $p^2\, q^3$ vollständig entwickelt werden.

*

* *

Hier ist

$$p^2 = a^2 + 2abz + \left.\begin{matrix} 2ac \\ + b^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} 2ad \\ + 2bc \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} 2ae \\ + 2bd \\ + c^2 \end{matrix}\right\} z^4 + \cdots$$

$$q^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta z + \left.\begin{matrix} 3\alpha^2\gamma \\ + 3\alpha\beta^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} 3\alpha^2\delta \\ + 6\alpha\beta\gamma \\ + \beta^3 \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} 3\alpha\varepsilon^2 \\ + 6\alpha\beta\delta \\ + 3\alpha\gamma^2 \\ + 3\beta^2\gamma \end{matrix}\right\} z^4 + \cdots$$

und daher ist nach dem zweiten Zusatze

$$p^2q^3 = \alpha^3a^2 + \left.\begin{matrix} \alpha^3.2ab \\ + 3\alpha^2\beta.a^2 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} \alpha^3(2ac + b^2) \\ + 3\alpha^2\beta.2ab \\ + (3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2)a^2 \end{matrix}\right\} z^2 +$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha^3(2ad + 2bc) \\ + 3\alpha^2\beta(2ac + b^2) \\ + (3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2).2ab \\ + (3\alpha^2\delta + 6\alpha\beta\gamma + \beta^3)a^2 \end{matrix}\right\} z^3 + \cdots$$

§. 91.

*) Soll nur im allgemeinen die Form des Produkts p^2q3 angegeben also das Produkt nicht vollständig entwickelt werden, so muss man p^2 und q^3 nur durch Klassenzeichen ausdrücken. (§. 82).

§. 91.

Es ist nicht nothwendig, dass man um das Produkt der Dignitäten mehrerer Reihen zu erhalten, jedesmal das Gesuchte zuerst durch Localausdrücke bestimmt; es soll daher durch Beispiele noch eine andere Methode angegeben werden.

1. *Beispiel.*

Es soll $p^4 q^2$ entwickelt werden, wobei angenommen wird, dass $p^4 = (a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^4$ und $q^2 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots)^2$.

* * *

Hier ist für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ a, & b, & c, & d, & \ldots = \rho \end{pmatrix}$ ~~ρ~~ π

$$p^4 = {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\pi}{D} + {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\pi}{D}z + {}_{\mathfrak{b}}^{6}\overset{\pi}{D}z^2 + {}_{\mathfrak{b}}^{7}\overset{\pi}{D}z^3 + {}_{\mathfrak{b}}^{8}\overset{\pi}{D}z^4 + \cdots$$

und für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots = \pi \end{pmatrix}$, ist

$$q^2 = {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} + {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\rho}{B}z + {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\rho}{B}z^2 + {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\rho}{B}z^3 + {}_{\mathfrak{b}}^{6}\overset{\rho}{B}z^4 + \cdots$$

Aus diesem Grunde ist für den Zeiger

$$\begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\pi}{D}, & {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\pi}{D}, & {}_{\mathfrak{b}}^{6}\overset{\pi}{D}, & \ldots = \sigma \\ {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B}, & {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\rho}{B}, & {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\rho}{B}, & \ldots = \tau \end{bmatrix}$$

$$p^4 q^2 = {}^{2}\overset{\tau\sigma}{\mathfrak{B}} + {}^{3}\overset{\tau\sigma}{\mathfrak{B}}z + {}^{4}\overset{\tau\sigma}{\mathfrak{B}}z^2 + {}^{5}\overset{\tau\sigma}{\mathfrak{B}}z^3 + {}^{6}\overset{\tau\sigma}{\mathfrak{B}}z^4 + {}^{7}\overset{\tau\sigma}{\mathfrak{B}}z^5 + \cdots$$

Ent-

Entwickelt man diesen Ausdruck für seinen Zeiger, so erhält man

$$p^4 q^2 = {}_{b}{}^{2}\overset{\varrho}{B} \cdot {}_{b}{}^{4}\overset{\pi}{D} + \left.\begin{array}{l} {}_{b}{}^{2}\overset{\varrho}{B} \cdot {}_{b}{}^{5}\overset{\pi}{D} \\ {}_{b}{}^{3}\overset{\varrho}{B} \cdot {}_{b}{}^{4}\overset{\pi}{D} \end{array}\right| z + \left.\begin{array}{l} {}_{b}{}^{2}\overset{\varrho}{B} \cdot {}_{b}{}^{6}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{b}{}^{3}\overset{\varrho}{B} \cdot {}_{b}{}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{b}{}^{4}\overset{\varrho}{B} \cdot {}_{b}{}^{4}\overset{\pi}{D} \end{array}\right| z^2 + \cdots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots = \pi \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots = \varrho \end{array}\right)$$

2. *Beispiel.*

Es soll das Produkt $p^4 \cdot q^2 \cdot r^3$ angegeben werden, wobei $r = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$ gesetzt wird und unter p und q wieder die nämlichen Reihen gedacht werden, welche sie im ersten Beispiele bezeichneten

* * *

Es ist

$$p^4 = {}_{b}{}^{4}\overset{\pi}{D} + {}_{b}{}^{5}\overset{\pi}{D}z + {}_{b}{}^{6}\overset{\pi}{D}z^2 + {}_{b}{}^{7}\overset{\pi}{D}z^3 + {}_{b}{}^{8}\overset{\pi}{D}z^4 + \cdots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ a,\ b,\ c,\ d\ \ldots = \pi \end{array}\right)$$

$$q^2 = {}_{b}{}^{2}\overset{\varrho}{B} + {}_{b}{}^{3}\overset{\varrho}{B}z + {}_{b}{}^{4}\overset{\varrho}{B}z^2 + {}_{b}{}^{5}\overset{\varrho}{B}z^3 + {}_{b}{}^{6}\overset{\varrho}{B}z^4 + \cdots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots = \varrho \end{array}\right)$$

$$p^3 = {}_{c}{}^{3}\overset{\upsilon}{C} + {}_{c}{}^{4}\overset{\upsilon}{C}z + {}_{c}{}^{5}\overset{\upsilon}{C}z^2 + {}_{c}{}^{6}\overset{\upsilon}{C}z^3 + {}_{c}{}^{7}\overset{\upsilon}{C}z^4 + \cdots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \ldots = \upsilon \end{array}\right)$$

folglich ist das Produkt

$$p^4q^2r^3 = \overset{\varphi\tau\sigma}{{}^{3}C} + \overset{\varphi\tau\sigma}{{}^{4}C}z + \overset{\varphi\tau\sigma}{{}^{5}C}z^2 + \overset{\varphi\tau\sigma}{{}^{6}C}z^3 + \overset{\varphi\tau\sigma}{{}^{7}C}z^4 + \ldots$$

$$\begin{array}{l} \quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ \ldots \\ \left[\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D},\ {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\pi}{D},\ {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\pi}{D},\ {}_{\mathfrak{d}}^{7}\overset{\pi}{D},\ \ldots = \sigma \\ {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B},\ {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\rho}{B},\ {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\rho}{B},\ {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\rho}{B},\ \ldots = \tau \\ {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C},\ {}_{\mathfrak{c}}^{4}\overset{\upsilon}{C},\ {}_{\mathfrak{c}}^{5}\overset{\upsilon}{C},\ {}_{\mathfrak{c}}^{6}\overset{\upsilon}{C},\ \ldots = \varphi \end{array}\right] \end{array}$$

$$= {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D} + \left.\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{4}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D} \end{array}\right| z +$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{3}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{4}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{4}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D} \\ + {}_{\mathfrak{c}}^{5}\overset{\upsilon}{C} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\rho}{B} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\pi}{D} \end{array}\right| z^2 + \ldots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \\ a,\ b,\ c,\ d \ldots = \pi \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \ldots = \rho \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D} \ldots = \upsilon \end{array}\right)$$

1. An-

1. *Anmerkung.* a)

Um die Produkte p^4q^2 (1. Beiſp.) und $p^4q^2r^3$ (2. Beiſp.) vollſtändig zu entwickeln, hat man nur nöthig in dem letzten Ausdrucke der für ein jedes Produkt angegeben iſt, die Klaſſen für die darunter ſtehenden Zeiger zu evolviren.

§. 92.

2. *Aufgabe.*

Es ſoll die Form des Produkts der m Dignitäten p^b, q^c, r^d, s^e u. ſ. w. angegeben werden, unter der Vorausſetzung, daſs eine jede der Reihen p, q, r u. ſ. f. die Form $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots$ hat.

a) Für Denjenigen der in der Entwickelung ſolcher Klaſſen, als $\overset{\ldots\chi\varphi\tau\sigma}{{}^{n}C}$, nicht ſehr geübt iſt, möchte dieſe Entwickelung, wenn ſie für einen ſolchen Zeiger rein combinatoriſch geſchehn ſollte, deſſen Elemente ſelbſt wieder Klaſſen ſind, mit Schwierigkeiten verbunden ſeyn; er würde ſich alſo genöthigt ſehn, jene Klaſſen erſt in Zahlen anzugeben und hierauf für die Zahlenelemente die dem Zeiger nach damit correſpondirenden Klaſſenzeichen zu ſetzen, folglich die Klaſſen arithmetiſch-combinatoriſch zu evolviren. Einem Ungeübten iſt alſo auf jeden Fall zu rathen von der im 90ten Paragraphe angegebenen Methode Gebrauch zu machen, weil die Evolution der Klaſſen durch Localzeichen eben ſo leicht iſt als die Entwickelung durch Zahlen und weil ein jedes Localzeichen allemal beſtimmt nachweiſet worauf es ſich bezieht. Aus dieſem Grunde iſt überhaupt der Gebrauch der Localzeichen ſehr zu empfehlen, daher auch in der Folge noch häufig die Localformeln vorkommen werden.

Auflösung.

Es ist

$$..s^e r^d q^c p^b = \left({}^{m}\overset{..\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^0 + {}^{m+1}\overset{..\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^1 + {}^{m+2}\overset{..\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^2 + {}^{m+3}\overset{..\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} z^3 + \ldots \right) z^{b+c+d+e+\ldots}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots \\ p^b\varkappa 1,\ p^b\varkappa 2,\ p^b\varkappa 3,\ p^b\varkappa 4 \ldots = \pi \\ q^c\varkappa 1,\ q^c\varkappa 2,\ q^c\varkappa 3,\ q^c\varkappa 4 \ldots = \rho \\ r^d\varkappa 1,\ r^d\varkappa 2,\ r^d\varkappa 3,\ r^d\varkappa 4 \ldots = \sigma \\ s^e\varkappa 1,\ s^e\varkappa 2\ \ s^e\varkappa 3,\ s^e\varkappa 4 \ldots = \tau \\ \text{''}\quad \text{''}\quad \text{''}\quad \text{''}\quad \text{''} \end{array}\right]$$

Beweis.

Nach §. 83 und §. 85 hat eine jede der Reihen p^b, q^c, r^d, u. s. f. die Form $(Az^0 + Bz^1 + Cz^2 + Dz^3 + ..)z^m$ so dass

$$p^b = (p^b\varkappa 1.z^0 + p^b\varkappa 2.z^1 + p^b\varkappa 3.z^2 + p^b\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^b$$

$$q^c = (q^c\varkappa 1.z^0 + q^c\varkappa 2.z^1 + q^c\varkappa 3.z^2 + q^c\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^c$$

$$r^d = (r^d\varkappa 1.z^0 + r^d\varkappa 2.z^1 + r^d\varkappa 3.z^2 + r^d\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^d$$

" " " " " "

Macht man sich also für die Coefficienten dieser Reihen den in der Auflösung angegebenen Zeiger, so erhält man auch wegen §. 90 das in der Auflösung angegebene Produkt.

Zusatz.

Es ist $(..s^e r^d q^c p^b) \varkappa (n+1) = {}^{m+n}\overset{..\tau\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}}$

§. 93.

3. *Aufgabe.*

Es soll im allgemeinen die Form des Produkts folgender m Reihen angegeben werden.

$$p^v = (Az^{\mu} + Bz^{\mu+\delta} + Cz^{\mu+2\delta} + Dz^{\mu+3\delta} + Ez^{\mu+4\delta} + \ldots)^v$$
$$q^n = (az^{\nu} + bz^{\nu+\delta} + cz^{\nu+2\delta} + dz^{\nu+3\delta} + ez^{\nu+4\delta} + \ldots)^n$$
$$r^l = (\mathfrak{A}z^{\pi} + \mathfrak{B}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{C}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\pi+3\delta} + \mathfrak{E}z^{\pi+4\delta} + \ldots)^l$$
" " " " " " "

Auflösung.

Es ist, wenn man $v\mu + n\nu + l\pi + \ldots = \Sigma$ setzt,

$$\ldots r^l q^n p^v = {}^{m}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma} + {}^{m+1}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\overset{..\upsilon\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma+3\delta} + \ldots$$

$$\left[\begin{array}{l} \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots \\ p^v\varkappa 1,\ p^v\varkappa 2,\ p^v\varkappa 3,\ p^v\varkappa 4, \ldots = \sigma \\ q^n\varkappa 1,\ q^n\varkappa 2,\ q^n\varkappa 3,\ q^n\varkappa 4, \ldots = \tau \\ r^l\varkappa 1,\ r^l\varkappa 2,\ r^l\varkappa 3,\ r^l\varkappa 4, \ldots = \upsilon \\ \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \end{array}\right]$$

Beweis.

Die m Reihen p^v, q^n, r^l u. s. w. lassen sich nach §. 86 und 87 so ausdrücken:

$$p^v = p^v\varkappa 1 . z^{v\mu} + p^v\varkappa 2 . z^{v\mu+\delta} + p^v\varkappa 3 . z^{v\mu+2\delta} + p^v\varkappa 4 . z^{v\mu+3\delta} + \ldots$$
$$q^n = q^n\varkappa 1 . z^{n\nu} + q^n\varkappa 2 . z^{n\nu+\delta} + q^n\varkappa 3 . z^{n\nu+2\delta} + q^n\varkappa 4 . z^{n\nu+3\delta} + \ldots$$
$$r^l = r^l\varkappa 1 . z^{l\pi} + r^l\varkappa 2 . z^{l\pi+\delta} + r^l\varkappa 3 . z^{l\pi+2\delta} + r^l\varkappa 4 . z^{l\pi+3\delta} + \ldots$$
" " " " " "

 Ver-

Vergleicht man die Form der Ausdrücke für p^v, q^n, r^l, u. f. f. mit den Reihen der Aufgabe des §. 76, fo fällt fogleich in die Augen, dafs diefe Reihen fo durch ihre Coefficienten und durch die Exponenten, μ, ν, π u. f. f. beftimmt werden als die Ausdrücke für p^v, q^n, r^l u. f. w. durch ihren Coefficienten und durch die Exponenten $v\mu$, $n\nu$, $l\pi$ u. f. f. beftimmt find. Aus diefem Grunde kann fich auch der allgemeine Ausdruck für das Produkt $\ldots r^l q^n p^v$ von dem allgemeinen Ausdrucke für das Produkt der Reihen der Aufgabe des §. 76 nur durch den Zeiger uud aufserdem nur noch dadurch unterfcheiden, dafs bei ihm Σ nicht gleich $\mu + \nu + \pi + \cdots$, fondern gleich $v\mu + n\nu + l\pi + \cdots$ ift. Da nun zwifchen dem allgemeinen Ausdrucke für das Produkt $\ldots r^l q^n p^v$, welchen die Auffung giebt, und zwifchen dem allgemeinen Ausdrucke der m Reihen der Aufgabe des §. 76 fich auch nur der angegebene Unterfchied befindet, fo ift einleuchtend dafs das Produkt $\ldots r^l q^n p^v$ durch die Auflöfung richtig beftimmt ift.

Zufatz.

Es ift $(\ldots r^l q^n p^v) \, 7 \, (t+1) = {}^{m+t}\overset{\ldots v\tau\sigma}{\mathcal{M}} z^{\Sigma + t\delta}$, alfo

$$(\ldots r^l q^n p^v) \, 7 \, (t+1) \varkappa = {}^{m+t}\overset{\ldots v\tau\sigma}{\mathcal{M}}.$$

Beifpiel.

Es fey

$$p^4 = (Az^{\mu} + Bz^{\mu+\delta} + Cz^{\mu+2\delta} + Dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^4$$
$$q^3 = (az^{\nu} + bz^{\nu+\delta} + cz^{\nu+2\delta} + dz^{\nu+3\delta} + \ldots)^3$$
$$r^2 = (\mathfrak{A}z^{\pi} + \mathfrak{B}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{C}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\pi+3\delta} + \ldots)^2;$$

es soll das dritte Glied des Produkts $r^2 q^3 p^4$ allgemein dargestellt werden.

* * *

Hier ist $l=2$, $n=3$, $v=4$, $t=2$, $m=3$, $\mathcal{M}=C$, folglich das gesuchte Glied, wenn $4\mu+3\nu+2\pi+2\delta = \Delta$ gesetzt wird,

$$= \overset{\upsilon\tau\sigma}{{}^5C_z{}^{\Delta}} \left[\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ p^4\varkappa 1, & p^4\varkappa 2, & p^4\varkappa 3 \ldots = \sigma \\ q^3\varkappa 1, & q^3\varkappa 2, & q^3\varkappa 3, \ldots = \tau \\ r^2\varkappa 1, & r^2\varkappa 2, & r^2\varkappa 3, \ldots = \upsilon \end{matrix}\right] = \left.\begin{matrix} r^2\varkappa 1.q^3\varkappa 1.p^4\varkappa 3 \\ + r^2\varkappa 1.q^3\varkappa 2.p^4\varkappa 2 \\ + r^2\varkappa 1.q^3\varkappa 3.p^4\varkappa 1 \\ + r^2\varkappa 2.q^3\varkappa 1.p^4\varkappa 2 \\ + r^2\varkappa 2.q^3\varkappa 2.p^4\varkappa 1 \\ + r^2\varkappa 3.q^3\varkappa 1.p^4\varkappa 1 \end{matrix}\right] z^{\Delta}$$

Es ist aber

$$p^4 = {}_{\mathfrak{d}}\overset{\varphi}{{}^4D}z^{4\mu} + {}_{\mathfrak{d}}\overset{\varphi}{{}^5D}z^{4\mu+\delta} + {}_{\mathfrak{d}}\overset{\varphi}{{}^6D}z^{4\mu+2\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ A, & B, & C, & D \ldots = \varphi \end{matrix}\right)$$

$$q^3 = {}_{c}\overset{\chi}{{}^3C}z^{3\nu} + {}_{c}\overset{\chi}{{}^4C}z^{3\nu+\delta} + {}_{c}\overset{\chi}{{}^5C}z^{3\nu+2\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots = \chi \end{matrix}\right)$$

$$r^2 = {}_{\mathfrak{b}}\overset{\psi}{{}^2B}z^{2\pi} + {}_{\mathfrak{b}}\overset{\psi}{{}^3B}z^{2\pi+\delta} + {}_{\mathfrak{b}}\overset{\psi}{{}^4B}z^{2\pi+2\delta} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, \ldots = \psi \end{matrix}\right)$$

daher

daher ist auch

$$r^2 q^3 p^4 = \left.\begin{array}{l} {}_{b}\overset{\psi}{{}^{2}B} \,.\, {}_{c}\overset{\chi}{{}^{3}C} \,.\, {}_{b}\overset{\varphi}{{}^{6}D} \\ + {}_{b}\overset{\psi}{{}^{2}B} \,.\, {}_{c}\overset{\chi}{{}^{4}C} \,.\, {}_{b}\overset{\varphi}{{}^{5}D} \\ + {}_{b}\overset{\psi}{{}^{2}B} \,.\, {}_{c}\overset{\chi}{{}^{5}C} \,.\, {}_{b}\overset{\varphi}{{}^{4}D} \\ + {}_{b}\overset{\psi}{{}^{3}B} \,.\, {}_{c}\overset{\chi}{{}^{3}C} \,.\, {}_{b}\overset{\varphi}{{}^{5}D} \\ + {}_{b}\overset{\psi}{{}^{3}B} \,.\, {}_{c}\overset{\chi}{{}^{4}C} \,.\, {}_{b}\overset{\varphi}{{}^{4}D} \\ + {}_{b}\overset{\psi}{{}^{4}B} \,.\, {}_{c}\overset{\chi}{{}^{3}C} \,.\, {}_{b}\overset{\varphi}{{}^{4}D} \end{array}\right] z^{4\mu+3\nu+2\pi+2\delta}$$

§. 94.

4. *Aufgabe.*

Es soll unter der Voraussetzung, dass k, r, v ganze positive Zahlen sind, die Form des Produkts folgender m Reihen angegeben werden:

$$\begin{array}{l} p^k = (az^a + bz^b + cz^c + dz^d + ez^e + fz^f + \ldots)^k \\ q^r = (Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + Ez^E + Fz^F + \ldots)^r \\ s^v = (\mathfrak{a}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{d}z^{\mathfrak{d}} + \mathfrak{e}z^{\mathfrak{e}} + \mathfrak{f}z^{\mathfrak{f}} + \ldots)^v \\ \quad '' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \end{array}$$

Es ist

$$\ldots s^v q^r p^k = {}^{m}\overset{..\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}_{z^*} + {}^{m+1}\overset{..\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}_{z^*} + {}^{m+2}\overset{..\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}_{z^*} + {}^{m+3}\overset{..\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}_{z^*} + \cdots$$

$$\left[\begin{array}{l} 1,\; 2,\; 3 \ldots \\ p^k\varkappa 1,\; p^k\varkappa 2,\; p^k\varkappa 3, \ldots = \pi \\ q^r\varkappa 1,\; q^r\varkappa 2,\; q^r\varkappa 3, \ldots = \varrho \\ s^v\varkappa 1,\; s^v\varkappa 2,\; s^v\varkappa 3, \ldots = \sigma \\ \;'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \end{array}\right]$$

Beweis.

Nach §. 88. ist

$$p^k = p^k\varkappa 1.z^* + p^k\varkappa 2.z^* + p^k\varkappa 3.z^* + p^k\varkappa 4.z^* + \ldots,$$
$$q^r = q^r\varkappa 1.z^* + q^r\varkappa 2.z^* + q^r\varkappa 3.z^* + q^r\varkappa 4.z^* + \ldots,$$
$$s^v = s^v\varkappa 1.z^* + s^v\varkappa 2.z^* + s^v\varkappa 3.z^* + s^v\varkappa 4.z^* + \ldots,$$
$$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$$

folglich ist auch nach §. 77 die Form des gesuchten Produkts die in der Auflösung angegebene.

Zusatz.

Es ist $(\ldots s^v q^r p^k) \urcorner (n+1) = {}^{m+n}\overset{\ldots\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}} z^*$, also

$$(\ldots s^v q^r p^k) \urcorner (n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\overset{\ldots\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}.$$

Beispiel.

Das vierte Glied folgender drei Reihen zu bestimmen:

$$p^2 = (az^a + bz^b + cz^c + dz^d + ez^e + fz^f + \ldots)^2,$$
$$q^4 = (Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + Ez^E + Fz^F + \ldots)^4,$$
$$s^5 = (\mathfrak{A}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{B}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{C}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{D}z^{\mathfrak{d}} + \mathfrak{E}z^{\mathfrak{e}} + \mathfrak{F}z^{\mathfrak{f}} + \ldots)^5,$$

* * *

Das gesuchte Glied ist gleich

$$
{}^{6}\overset{\sigma\varrho\pi}{C}_{z^*} = \left.\begin{array}{l}
s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 4 \\
+ s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 2 \,.\, p^2\varkappa 3 \\
+ s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 3 \,.\, p^2\varkappa 2 \\
+ s^5\varkappa 1 \,.\, q^4\varkappa 4 \,.\, p^2\varkappa 1 \\
+ s^5\varkappa 2 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 3 \\
+ s^5\varkappa 2 \,.\, q^4\varkappa 2 \,.\, p^2\varkappa 2 \\
+ s^5\varkappa 2 \,.\, q^4\varkappa 3 \,.\, p^2\varkappa 1 \\
+ s^5\varkappa 3 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 2 \\
+ s^5\varkappa 3 \,.\, q^4\varkappa 2 \,.\, p^2\varkappa 1 \\
+ s^5\varkappa 4 \,.\, q^4\varkappa 1 \,.\, p^2\varkappa 1
\end{array}\right] z^*
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
1,\quad 2,\quad 3\ .. \\
p^2\varkappa 1, p^2\varkappa 2, p^2\varkappa 3, .. = \pi \\
q^4\varkappa 1, q^4\varkappa 2, q^4\varkappa 3, .. = \varrho \\
s^5\varkappa 1, s^5\varkappa 2, s^5\varkappa 3, .. = \sigma
\end{array}\right\}
$$

Es ist aber (§. 88)

$$
p^2 = b\,{}^{2}\overset{\tau}{B}_{z^*} + b\,{}^{3}\overset{\tau}{B}_{z^*} + b\,{}^{4}\overset{\tau}{B}_{z^*} + b\,{}^{5}\overset{\tau}{B}_{z^*} + \ldots,
$$

$$
\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ a,\ b,\ c,\ d\,.. = \tau \end{array}\right)
$$

$$
q^4 = d\,{}^{4}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + d\,{}^{5}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + d\,{}^{6}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + d\,{}^{7}\overset{\upsilon}{D}_{z^*} + \ldots,
$$

$$
\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ A, B, C, D\,.. = \upsilon \end{array}\right)
$$

$$
s^5 = e\,{}^{5}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + e\,{}^{6}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + e\,{}^{7}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + e\,{}^{8}\overset{\varphi}{E}_{z^*} + \ldots,
$$

$$
\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\,.. \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}\,.. = \varphi \end{array}\right)
$$

daher

daher ist auch

$$
\begin{aligned}
s^5 q^4 p^2 74 = {} & {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{7}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{6}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{4}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{6}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{6}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{6}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{7}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{3}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{7}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{5}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B} \\
+ {} & {}_{e}^{8}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{2}\overset{\tau}{B}
\end{aligned}
\Bigg| z^{*}
$$

Anmerkung.

Die vollständige Entwickelung dieses ganzen Ausdrucks ist leicht, wie man aus der Darstellung des Werthes für ${}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{\mathfrak{d}}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{\mathfrak{b}}^{5}\overset{\tau}{B} z^{*}$ deutlich sehn wird:

Es

Es ist nämlich $\,{}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^5$

$${}_{b}^{4}\overset{\upsilon}{D} = AAAA = A^4$$

$${}_{b}^{5}\overset{\tau}{B} = 2ad,\ 2bc$$

folglich $\,{}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{b}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{b}^{5}\overset{\tau}{B} = 2\mathfrak{A}^5A^4ad + 2\mathfrak{A}^5A^4bc$

also $\,{}_{e}^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot {}_{b}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot {}_{b}^{5}\overset{\tau}{B}z^{*} = 2\mathfrak{A}^5A^4adz^{5\mathfrak{a}+4\mathcal{A}+a+d}$

$$+\ 2\mathfrak{A}^5A^4bcz^{5\mathfrak{a}+4\mathcal{A}+b+c}$$

§. 95.

5. *Aufgabe.*

Die Form des Produkts $p^k q^r s^v$ unter der Voraussetzung anzugeben, daſs unter k, r, v jede ganze und gebrochne, positive und negative Zahl gedacht werden kann. *a*).

Auflösung.

Es ist

$$\ldots s^v q^r s^k = {}^{m}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+1}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+2}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+3}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + {}^{m+4}\overset{..\sigma\rho\pi}{\mathcal{M}} + \ldots\ldots$$

$$\left[\begin{array}{l} \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots \\ p^k 7 1,\ p^k 7 2,\ p^k 7 3,\ \ldots = \pi \\ q^r 7 1,\ q^r 7 2,\ q^r 7 3,\ \ldots = \rho \\ s^v 7 1,\ s^v 7 2,\ s^v 7 3,\ \ldots = \sigma \end{array}\right]$$

$$''\qquad ''\qquad ''\qquad ''$$

Be-

a) p, q, s u. s. f. zeigen hier wieder die nämlichen Reihen an, welche sie in der vierten Aufgabe bezeichneten.

Beweis.

Es lassen sich p^k, q^r, s^v u. s. f. folgendermaſsen ausdrücken:

$$p^k = p^k\urcorner 1 + p^k\urcorner 2 + p^k\urcorner 3 + p^k\urcorner 4 + p^k\urcorner 5 + p^k\urcorner 6 + \cdots\cdots$$
$$q^r = q^r\urcorner 1 + q^r\urcorner 2 + q^r\urcorner 3 + q^r\urcorner 4 + q^r\urcorner 5 + q^r\urcorner 6 + \cdots\cdots$$
$$s^v = s^v\urcorner 1 + s^v\urcorner 2 + s^v\urcorner 3 + s^v\urcorner 4 + s^v\urcorner 5 + s^v\urcorner 6 + \cdots\cdots$$

" " " " " " "

folglich läſst sich auch wegen §. 71, 2) das Produkt im allgemeinen so angeben wie in der Auflösung geschehen ist.

Zusatz.

$$\text{Es ist } (\ldots s^v q^r p^k)\urcorner(n+1) = {}^{m+n}\overset{\ldots\sigma\rho\pi}{\mathfrak{M}}.$$

Beispiel.

Es soll das dritte Glied des Produkts der beiden Reihen $p^{\frac{1}{2}} = (az^a + bz^b + cz^c + \ldots)^{\frac{1}{2}}$ und $q^{-2} = (Az^A + Bz^B + Cz^C + \ldots)^{-2}$ durch das Localzeichen $\urcorner$ angegeben werden.

* * *

Es ist $q^{-2} p^{\frac{1}{2}}\urcorner 3 =$

$$\left.\begin{array}{c} {}^{4}\overset{\rho\pi}{B} \\ \left[\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ p^{\frac{1}{2}}\urcorner 1, & p^{\frac{1}{2}}\urcorner 2, & p^{\frac{1}{2}}\urcorner 3, & \ldots = \pi \\ q^{-2}\urcorner 1, & q^{-2}\urcorner 2, & q^{-2}\urcorner 3, & \ldots = \rho \end{array}\right] \end{array}\right. = \begin{array}{l} q^{-2}\urcorner 1 . p^{\frac{1}{2}}\urcorner 3 \\ + q^{-2}\urcorner 2 . p^{\frac{1}{2}}\urcorner 2 \\ + q^{-2}\urcorner 3 . p^{\frac{1}{2}}\urcorner 1 \end{array}$$

1. *Anmerkung.*

Will man die Localformel in eine solche verwandeln die durch Klassenzeichen ausgedrückt ist, welche sich auf die Coefficienten der gegebenen beiden Reihen beziehn,

ziehn, so muss man von $p^{\frac{1}{2}}$ und q^{-2} nach §. 89 Aufg. 11, Aufl. die ersten drei Glieder entwickeln, und diese in die Localformel für die Ausdrücke substituiren, durch welche sie repräsentirt werden.

2. *Anmerkung.*

Nimmt man die gedachte Substitution für $q^{-2} 7 \mathfrak{q} . p^{\frac{1}{2}} 7 \mathfrak{q}$ vor, so erhält man

$$ {}^{-2}\mathfrak{A}_{A^{-3} z^{-3A}} \left[\begin{array}{c} {}_{a}{}^{1}\overset{\chi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{2}\overset{\chi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{3}\overset{\chi}{A}_{z^*} \\ '' \end{array} \right] \times {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{a^{\frac{1}{2}-1} z^{(\frac{1}{2}-1)a}} \left[\begin{array}{c} {}_{a}{}^{1}\overset{\varphi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{2}\overset{\varphi}{A}_{z^*} \\ {}_{a}{}^{3}\overset{\varphi}{A}_{z^*} \\ '' \end{array} \right] $$

$$ \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3, \ldots \\ B,\ C,\ D, \ldots = \chi \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3, \ldots \\ b,\ c,\ d, \ldots = \varphi \end{array} \right) $$

Macht man hier für die zwei Klassenreihen die beiden Zeiger

$$ \left(\begin{array}{l} \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots \\ {}_{a}{}^{1}\overset{\chi}{A},\ {}_{a}{}^{2}\overset{\chi}{A},\ {}_{a}{}^{3}\overset{\chi}{A}, \ldots = \psi \end{array} \right) $$

$$ \left(\begin{array}{l} \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots \\ {}_{a}{}^{1}\overset{\varphi}{A},\ {}_{a}{}^{2}\overset{\varphi}{A},\ {}_{a}{}^{3}\overset{\varphi}{A}, \ldots = \omega \end{array} \right) $$

so läſst sich der für $q^{-2} 7 \mathfrak{q} . p^{\frac{1}{2}} 7 \mathfrak{q}$ angegebene Ausdruck in diesen verwandeln:

$$ {}^{-2}\mathfrak{A}\ {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{A^{-3} a^{\frac{1}{2}-1} z^{-3A+(\frac{1}{2}-1)a}} \left({}^{2}\overset{\omega\psi}{\mathfrak{B}} + {}^{3}\overset{\omega\psi}{\mathfrak{B}} + {}^{4}\overset{\omega\psi}{\mathfrak{B}} + \ldots \right)_{z^*}. $$

3. *An-*

3. *Anmerkung.*

Werden die Glieder eines Produkts noch mehrerer als zweier Reihen durch Localformeln angegeben und der ersten Anmerkung gemäſs verwandelt, ſo wird man hierbei auf deſto zuſammengeſetztere Ausdrücke geführt, je gröſser die Anzahl der Reihen iſt, die unter ſich multiplicirt werden und je höher das Glied iſt, welches man ſucht. Die zweite Anmerkung wird aber hinreichend lehren, wie ſich ſolche Ausdrücke auf einfachere, der Form nach, reduciren laſſen,

V. Combinatoriſche Entwickelung der Quotienten mehrerer Reihen.

§. 96.

1. *Aufgabe.*

Den Quotienten $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Auflöſung.

Es iſt $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} =$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{{}_{\mathfrak{a}}{}'A}{\alpha^2} + \frac{{}_{\mathfrak{b}}{}'B}{\alpha^3} - \frac{{}_{\mathfrak{c}}{}'C}{\alpha^4} + \frac{{}_{\mathfrak{d}}{}'D}{\alpha^5} - \frac{{}_{\mathfrak{e}}{}'E}{\alpha^6} + \ldots\ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ldots}$$

Beweis.

Es iſt $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^{-1}$, folglich nach §. 81.

$$= \alpha^{-u}$$

$$= \alpha^{-1} + {}^{-1}\mathfrak{A}\,\alpha^{-2}{}_a{}'A + {}^{-1}\mathfrak{B}\,\alpha^{-3}{}_b{}'B + {}^{-1}\mathfrak{C}\,\alpha^{-4}{}_c{}'C + \ldots$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{A}\,{}_a{}'A}{\alpha^2} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{B}\,{}_b{}'B}{\alpha^3} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{C}\,{}_c{}'C}{\alpha^4} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots \end{pmatrix}$$

Da nun ${}^{-1}\mathfrak{A} = -1$, ${}^{-1}\mathfrak{B} = 1$, ${}^{-1}\mathfrak{C} = -1$, ${}^{-1}\mathfrak{D} = 1$ u. s. f. ist, so ist klar, daſs aus der zuletzt entwickelten Reihe, sobald darinn für die Binomialcoefficienten die eben angegebenen Werthe gesetzt werden, die in der Auflösung aufgestellte Reihe entsteht und daſs diese also auch die gesuchte ist.

1. *Zusatz.*

$$\left(\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\right)^{\!\gamma\,(n+1)} = \frac{{}_n{}'N}{\alpha^{n+1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta \ldots \end{pmatrix}$$

2. *Zusatz.*

Wird $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \alpha + q$ gesetzt, so wird in der Gleichung der Auflösung, ${}_a{}'A = q$, ${}_b{}'B = q^2$, ${}_c{}'C = q^3$, u. s. f. und folglich ist

$$\frac{1}{\alpha+q} = \frac{1}{\alpha} - \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} - \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} - \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots$$

Substituirt man hierinn 1 für α, so erhält man

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - \ldots,$$

und denkt man sich in dieser Gleichung unter q die Reihe $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$, so ist sie mit dieser gleichgültig (§. 80).

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots} = 1 - {}_a'A + {}_b'B - {}_c'C + {}_d'D - \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots \end{pmatrix}$$

3. *Zusatz.*

Wird in die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha+q} = \frac{1}{\alpha} - \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} - \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} - \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots;$$

$-q$ ſtatt $+q$ geſetzt, ſo bekömmt man

$$\frac{1}{\alpha-q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} + \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} + \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots;$$

Denkt man ſich hier unter q die Reihe $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots$ ſo wird

$$\frac{1}{\alpha-\beta-\gamma-\delta-\ldots} = \frac{1}{\alpha} + \frac{{}_a'A}{\alpha^2} + \frac{{}_b'B}{\alpha^3} + \frac{{}_c'C}{\alpha^4} + \ldots\ldots;$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots \end{pmatrix}$$

4. *Zusatz.*

Setzt man in die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha-q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} + \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} + \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots,$$

1 ſtatt α und läſst q die Reihe $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$ bedeuten, ſo erhält man (§. 80.).

$$\frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma-\ldots} = 1 + {}_a'A + {}_b'B + {}_c'C + \ldots\ldots,$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots \end{pmatrix}$$

§. 97.

2. *Aufgabe.*

Es wird für $\frac{a + b + c + d + \cdots}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots} = \frac{p}{\alpha + q}$ eine Reihe gesucht.

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{\alpha + q} =$

$$\begin{array}{lllll}
\frac{a}{\alpha} & - \frac{aa\,\overset{\pi}{{}'A}}{\alpha^2} & + \frac{ab\,\overset{\pi}{{}'B}}{\alpha^3} & - \frac{ac\,\overset{\pi}{{}'C}}{\alpha^4} & + \frac{ad\,\overset{\pi}{{}'D}}{\alpha^5} \quad - \cdots \\
 & + \frac{b}{\alpha} & - \frac{ba\,\overset{\pi}{{}'A}}{\alpha^2} & + \frac{bb\,\overset{\pi}{{}'B}}{\alpha^3} & - \frac{bc\,\overset{\pi}{{}'C}}{\alpha^4} \\
 & & + \frac{c}{\alpha} & - \frac{ca\,\overset{\pi}{{}'A}}{\alpha^2} & + \frac{cb\,\overset{\pi}{{}'B}}{\alpha^3} \\
 & & & + \frac{d}{\alpha} & - \frac{da\,\overset{\pi}{{}'A}}{\alpha^2} \\
 & & & & + \frac{e}{\alpha}
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \ldots = \pi \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p}{\alpha + q} = p \cdot \frac{1}{\alpha + q}$, also nach der Auflösung der Aufgabe des §. 96.

=

$$= (a+b+c+\ldots)\cdot\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{a\,{}'\overset{\pi}{A}}{\alpha^2} + \frac{b\,{}'\overset{\pi}{B}}{\alpha^3} - \frac{c\,{}'\overset{\pi}{C}}{\alpha^4} + \frac{b\,{}'\overset{\pi}{D}}{\alpha^5} - \ldots\right),$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3; & 4\ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon,\ \ldots = \pi\end{matrix}\right)$$

folglich nach §. 71, 2)

$$= {}^2\overset{\sigma\varrho}{B} + {}^3\overset{\sigma\varrho}{B} + {}^4\overset{\sigma\varrho}{B} + {}^5\overset{\sigma\varrho}{B} + {}^6\overset{\sigma\varrho}{B} + {}^7\overset{\sigma\varrho}{B} + {}^8\overset{\sigma\varrho}{B} + \ldots\ldots$$

$$\left[\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, \ldots & \\ \frac{1}{\alpha}, & -\frac{a\,{}'\overset{\pi}{A}}{\alpha^2}, & +\frac{b\,{}'\overset{\pi}{B}}{\alpha^3}, & -\frac{c\,{}'\overset{\pi}{C}}{\alpha^4}, & \ldots = \varrho \\ a, & b, & c, & d, & \ldots = \sigma\end{matrix}\right]$$

Werden hier nun ${}^2\overset{\sigma\varrho}{B}, {}^3\overset{\sigma\varrho}{B}, {}^4\overset{\sigma\varrho}{B}$, u. s. w. entwickelt, so entsteht die Reihe der Auflösung, folglich ist diese auch die richtige.

1. *Zusatz.*

Bezeichnet man das zweite Glied der Reihe p, da a das erste ist, mit $\overset{+1}{a}$, das dritte mit $\overset{+2}{a}$, das vierte mit $\overset{+3}{a}$, u. s. f. das nte mit $\overset{+(n-1)}{a}$, das (n+1)te mit $\overset{+n}{a}$, so wird

$$\frac{q}{\alpha+q}\,7\,(n+1) =$$

$$\frac{a^n\,{}^{0\prime}\overset{0}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n+1}} - \frac{\overset{-1}{b}{}^{n}\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{\alpha^n} + \frac{\overset{-2}{c}{}^{n}\,{}'\overset{-2}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n-1}} - \ldots \mp \frac{\overset{+(n-1)}{a}\,\alpha\,{}'A}{\alpha^2} \pm \frac{\overset{+n}{a}}{\alpha}.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3\ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta\ldots\end{matrix}\right)$$

2. Zusatz.

Da nach dem 3ten Zusatze des §. 96, $\frac{1}{\alpha - q}$ oder

$$\frac{1}{\alpha-\beta-\gamma-\delta-\ldots} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\overset{\prime}{\underset{a}{A}}}{\alpha^2} + \frac{\overset{\prime}{\underset{b}{B}}}{\alpha^3} + \frac{\overset{\prime}{\underset{c}{C}}}{\alpha^4} + \ldots \text{ ist,}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{matrix}\right)$$

so ist einleuchtend daß sich die Reihe für $p . \frac{1}{\alpha - q}$ also für $\frac{p}{\alpha - q}$ nur dadurch von der Reihe für $\frac{p}{\alpha + q}$ unterscheiden kann, daß in ihr die Zeichen nicht abwechseln, sondern alle † sind. Es ist folglich $\frac{p}{\alpha + q} \; 7 \; (n+1) =$

$$\frac{\overset{0}{a}n \overset{0\prime}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n+1}} + \frac{b\, n \overset{-1\prime}{\overset{-1}{\mathfrak{N}}}}{\alpha^{n}} + \frac{c\, n \overset{-2\prime}{\overset{-2}{\mathfrak{N}}}}{\alpha^{n-1}} + \ldots + \frac{\overset{+(n-2)}{a} \; \overset{\prime}{\underset{b}{B}}}{\alpha^3}$$

$$+ \frac{\overset{+(n-1)}{a} \; \overset{\prime}{\underset{a}{A}}}{\alpha^2} + \frac{\overset{+n}{a}}{\alpha}.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{matrix}\right).$$

§. 98.

3. Aufgabe.

Es soll $\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu + \Delta} + \gamma z^{\nu + 2\Delta} + \ldots}$ in eine Reihe evolvirt werden.

Auflösung.

Es ist $\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} =$

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{a\,{}^{1}A}{\alpha^{2}}z^{\Delta}-\left.\begin{matrix}\frac{a\,{}^{2}A}{\alpha^{2}}\\+\frac{b\,{}^{2}B}{\alpha^{3}}\end{matrix}\right\}z^{2\Delta}-\left.\begin{matrix}\frac{a\,{}^{3}A}{\alpha^{2}}\\+\frac{b\,{}^{3}B}{\alpha^{3}}\\-\frac{c\,{}^{3}C}{\alpha^{4}}\end{matrix}\right\}z^{3\Delta}-\left.\begin{matrix}\frac{a\,{}^{4}A}{\alpha^{2}}\\+\frac{b\,{}^{4}B}{\alpha^{3}}\\-\frac{c\,{}^{4}C}{\alpha^{4}}\\+\frac{d\,{}^{4}D}{\alpha^{5}}\end{matrix}\right\}z^{4\Delta}-\ldots\right\}z^{-\nu}$$

$$= \begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist

$$\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}=(\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots)^{-1},$$

also nach §. 87.

$$=\left(\alpha^{-1}+{}^{-1}\mathfrak{A}\,\alpha^{-2}a\,{}^{1}A\,z^{\Delta}+\left.\begin{matrix}{}^{-1}\mathfrak{A}\,\alpha^{-2}a\,{}^{2}A\\+{}^{-1}\mathfrak{B}\,\alpha^{-3}b\,{}^{2}B\end{matrix}\right\}z^{2\Delta}+\ldots\right\}z^{-\nu}.$$

Wird dieser Ausdruck noch weiter fortgesetzt und werden darinn statt ${}^{-1}\mathfrak{A}$, ${}^{-1}\mathfrak{B}$, ${}^{-1}\mathfrak{C}$, ${}^{-1}\mathfrak{D}$ u. s. w. die Werthe -1, $+1$, -1, $+1$ u. s. f. substituirt, so entsteht die in der Auflösung angegebene Reihe, folglich ist diese die gesuchte.

1. Zusatz.

$$\left(\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}\right)^{7(n+1)}=\left(-\frac{{}_a{}^{n}A}{\alpha^2}+\frac{{}_b{}^{n}B}{\alpha^3}-\frac{{}_c{}^{n}C}{\alpha^4}+\frac{{}_d{}^{n}D}{\alpha^5}-\ldots\mp\frac{{}_n{}^{n}\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}\right)z^{n\Delta-\nu}$$

2. Zusatz.

Der Inbegriff aller Klassen des $n+1$ten Gliedes läßt sich durch $i\,{}^{n}J$ ausdrücken und weil in ihm $a\,{}^{n}A$ mit $-\frac{1}{\alpha^{1+1}}$, ${}_b{}^{n}B$ mit $+\frac{1}{\alpha^{1+2}}$, ${}_c{}^{n}C$ mit $-\frac{1}{\alpha^{1+3}}$, u. s. f. multiplicirt ist, so kann man auch setzen

$$\left(\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}\right)^{7(n+1)}=$$

$$\left(\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{n}J\right)z^{n\Delta-\nu}$$

Der Werth des Zeichens wird hier, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, durch den Exponenten jeder einzelnen Klasse der $i\,{}^{n}J$ bestimmt. Für die erste Klasse nämlich, ist $* = 1$, für die zweite $= 2$, für die dritte $= 3$ u. s. w. und da wo der Werth des $*$ eine grade Zahl ist, ist $\frac{1}{\alpha^{1+*}}$ positiv, wo aber dieser Werth eine ungrade Zahl ist, ist $\frac{1}{\alpha^{1+*}}$ negativ.

F F Drückt man die einzelnen Glieder der Reihe der Auflösung so aus, wie jetzt das $n+1$te ausgedrückt ist, so erhält man $\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} =$

$$\left(\frac{1}{\alpha} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i^1J_z{}^{\Delta} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i^2J_z{}^{2\Delta} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i^3J_z{}^{3\Delta} \mp \ldots\right) z^{-\nu}$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} + \left({}_i^1J_z{}^{\Delta} + {}_i^2J_z{}^{2\Delta} + {}_i^3J_z{}^{3\Delta} + {}_i^4J_z{}^{4\Delta} + \ldots\right) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}\right) z^{-\nu}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, \ldots \end{pmatrix}$$

3. *Zusatz.*

Da sich ${}_i^1J + {}_i^2J + {}_i^3J + \ldots + {}_i^nJ = {}_i^n\mathfrak{J}$ setzen läſst wenn man ſich unter $\overset{n}{\mathfrak{J}}$ nicht bloſs die Combinationen zur Summe n ſondern auch die Combinationen zu allen vorhergehenden Summen denkt, wie ſie dieſe auch deutlich vor Augen legt (pag. 93.), und da man ferner in der zuletzt entwickelten Formel ganz deutlich die Relation ſieht, welche zwiſchen dem Exponenten einer Dignität von z, und zwiſchen dem Summenexponenten der J ſtatt findet, neben welcher die Dignität ſteht, weil nämlich jedesmal der Exponent der z ein Produkt des Δ durch den Summenexponenten iſt, ſo kann man die letzte Formel für $\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots}$, wenn ſie bis zur n†ten Klaſſe entwickelt gedacht wird, auch ſo ausdrücken:

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \left({}_i^n\mathfrak{J}_z{}^{*\Delta}\right) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}\right) z^{-\nu}.$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, \ldots \end{pmatrix}$$

4. Zusatz.

Setzt man $\nu = 1$ und $\Delta = 1$, so giebt der zweite Zusatz

$$\frac{1}{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + ..} =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + (i^1 J_z + i^2 J_{z^2} + i^3 J_{z^3} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}\right) z^{-1}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ..}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ ..}$$

5. Zusatz.

Wird $\nu = 0$ gesetzt, so erhält man durch den zweiten Zusatz.

$$\frac{1}{\alpha + \beta z^{\Delta} + \gamma z^{2\Delta} + ..} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + (i^1 J_{z^{\Delta}} + i^2 J_{z^{2\Delta}} + i^3 J_{z^{3\Delta}} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}$$

Schreibt man hier 1 für Δ, so bekömmt man

$$\frac{1}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + ..} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + (i^1 J_z + i^2 J_{z^2}\ i^3 J_{z^3} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ ...}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ ...}$$

6. Zusatz.

Substituirt man für das α der letzten Formel die Zahl 1, so wird

$$\frac{1}{1+\beta z+\gamma z^2+\ldots}=$$

$$1+\left(\overset{1}{i}J_z+\overset{2}{i}J_{z^2}+\overset{3}{i}J_{z^3}+\ldots\right)\cdot\mp\frac{1}{1^{1+*}}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ldots}$$

Entwickelt man diese Formel in Klassen, so erhält man *a*).

$$\frac{1}{1+\beta z+\gamma z^2+\ldots}=$$

$$1-{}_a{}^1A_z-\left.\begin{matrix}{}_a{}^2A\\+{}_b{}^2B\end{matrix}\right\}z^2-\left.\begin{matrix}{}_a{}^3A\\+{}_b{}^3B\\-{}_c{}^3C\end{matrix}\right\}z^3-\left.\begin{matrix}{}_aA^4\\+{}_b{}^4B\\-{}_c{}^4C\\+{}_d{}^4D\end{matrix}\right\}z^4 \quad \text{u. s. w.}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots}$$

Schreibt man hier α, β, γ, δ, u. s. w. statt β, γ, δ, ε, u. s. f. so wird

a) Es ist $\frac{1}{1^{1+*}}=1$ und zwar positiv oder negativ nachdem $*$ eine grade oder ungrade Zahl ist. Es muss aber jede Klasse der einzelnen J mit $\frac{1}{1^{1+*}}$ multiplicirt werden, und der Werth des $*$ ist der Klassenexponent der Klasse, welche mit $\frac{1}{1^{1+*}}$ multiplicirt werden soll, folglich ist einleuchtend, dass eine Klasse, deren Klassenexponent eine grade Zahl ist, mit $+1$ und eine solche, deren Klassenexponent eine ungrade Zahl ist, mit -1 multiplicirt werden muss.

$$\frac{1}{1+\alpha z+\beta z^2+\dots} =$$

$$1 - {}_a^1A_z \left.\begin{matrix}- {}_a^2A\\ + {}_b^2B\end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix}-{}_a^3A\\ -{}_b^3B\\ +{}_c^3C\end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix}-{}_a^4A\\+{}_b^4B\\-{}_c^4C\\+{}_d^4D\end{matrix}\right\} z^4 \quad \text{u. s. w.}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ \dots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots}$$

7. *Zusatz.*

Wird in dem letzten Ausdrucke des 6ten Zusatzes für $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$ u. s. f.; $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ u. s. w. substituirt, so werden für diese negative α, β, γ, δ, u. s. f. die Klassen eines ungraden Exponenten schon für sich negativ (weil die Elemente jeder Complexion durch die Multiplication verbunden gedacht werden) und folglich wieder positiv, wenn man ihnen das Zeichen — vorsetzt; die Klassen eines graden Klassenexponenten hingegen bleiben positiv. Es ist also

$$\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\dots} =$$

$$1 + {}_a^1A z \left.\begin{matrix}+ {}_a^2A\\ + {}_b^2B\end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix}+{}_a^3A\\ +{}_b^3B\\ +{}_c^3C\end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix}+{}_a^4A\\+{}_b^4B\\+{}_c^4C\\+{}_d^4D\end{matrix}\right\} z^4 \quad \text{u. s. w.}$$

$$= 1 + {}_i^1J z + {}_i^2J z^2 + {}_i^3J z^3 + {}_i^4J z^4 + \dots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\dots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\dots}$$

Dem dritten Zusatze nach, kann man also auch setzen, wenn die Formel die ersten $n+1$ Glieder entwickelt darstellen soll,

1

$$\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\ldots} = 1 + i^{n}\mathfrak{J} z^{*}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \end{pmatrix}$$

Beispiel.

Es sollen die ersten 6 Glieder des $\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\ldots}$ vollständig entwickelt werden.

* * *

Es ist ${}^{5}\mathfrak{J} = \begin{array}{l|l|l|l|l} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \\ \alpha & \alpha & \gamma & & \\ \alpha & \beta & \beta & & \\ \alpha & \delta & & & \\ \beta & \gamma & & & \\ \varepsilon & & & & \end{array}$

folglich $\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\ldots}$

$$= 1 + \alpha z + \left.\begin{matrix} \beta \\ +\alpha^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} \gamma \\ +2\alpha\beta \\ +\alpha^3 \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} \delta \\ +2\alpha\gamma \\ +\beta^2 \\ +3\alpha^2\beta \\ +\alpha^4 \end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix} \varepsilon \\ +2\alpha\delta \\ +2\beta\gamma \\ +3\alpha^2\gamma \\ +3\alpha\beta^2 \\ +4\alpha^3\beta \\ +\alpha^5 \end{matrix}\right\} z^5 + \ldots$$

§. 99.

4. *Aufgabe.*

$$\frac{az^{\mu}+bz^{\mu+\Delta}+cz^{\mu+2\Delta}+\ldots}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} = \frac{p}{q}$$ in eine Reihe aufzulösen.

Auf

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{q}$

$$= \left\{ \frac{a}{\alpha} z^{\mu} \begin{matrix} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot \overset{1}{i} J \\ + \frac{b}{\alpha} \end{matrix} \right\} z^{\mu+\Delta} \begin{matrix} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot \overset{2}{i} J \\ \mp \frac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot \overset{1}{i} J \\ + \frac{c}{\alpha} \end{matrix} \Bigg\} z^{\mu+2\Delta}$$

$$\begin{matrix} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot \overset{3}{i} J \\ \mp \frac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot \overset{2}{i} J \\ \mp \frac{c}{\alpha^{1+*}} \cdot \overset{1}{i} J \\ + \frac{d}{\alpha} \end{matrix} \Bigg\} z^{\mu+3\Delta} + \ldots \Bigg\} z^{-\nu} \qquad \left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots \end{matrix} \right)$$

$$= \left\{ \frac{a}{\alpha} z^{\mu} \begin{matrix} - \frac{a\,\overset{1}{a} A}{\alpha^2} \\ + \frac{b}{\alpha} \end{matrix} \right\} z^{\mu+\Delta} \begin{matrix} - \frac{a\,\overset{2}{a} A}{\alpha^2} + \frac{a\,\overset{2}{b} B}{\alpha^3} \\ - \frac{b\,\overset{1}{a} A}{\alpha^2} \\ + \frac{c}{\alpha} \end{matrix} \Bigg\} z^{\mu+2\Delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a\,\overset{3}{a}A}{\alpha^2}+\frac{a\,\overset{3}{b}B}{\alpha^3}-\frac{a\,\overset{3}{c}C}{\alpha^4} \\ -\frac{b\,\overset{2}{a}A}{\alpha^2}+\frac{b\,\overset{2}{b}B}{\alpha^3} \\ -\frac{c\,\overset{1}{a}A}{\alpha^2} \\ +\frac{d}{\alpha} \end{array}\right\} z^{\mu+3\Delta} - \ldots \left\} z^{-\nu} \right. \binom{1,\ 2,\ 3, \ldots}{\beta, \gamma,\ \delta \ldots}$$

Beweis

Es ist $\frac{p}{q}=$

$$\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} \cdot az^{\mu}+bz^{\mu+\Delta}+cz^{\mu+2\Delta}+\ldots,$$

alſo gleich dem Produkte der beiden Reihen (§. 98, 2 Z.)

$$\left(\frac{1}{\alpha}\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\overset{1}{J}z^{\Delta}\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\overset{2}{J}z^{2\Delta}\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\overset{3}{J}z^{3\Delta}\mp\ldots\right)z^{-\nu}$$

und $a+bz^{\Delta}+cz^{2\Delta}+dz^{3\Delta}+ez^{4\Delta}+\ldots\ldots)z^{\mu}$,
und folglich nach §. 75

$$=\left(\overset{sr}{{}^2B}+\overset{sr}{{}^3B}z^{\Delta}+\overset{sr}{{}^4B}z^{2\Delta}+\overset{sr}{{}^5B}z^{3\Delta}+\overset{sr}{{}^6B}z^{4\Delta}+\ldots\right)z^{\mu}.z^{-\nu}$$

$$=\left(\overset{sr}{{}^2B}z^{\mu}+\overset{sr}{{}^3B}z^{\mu+\Delta}+\overset{sr}{{}^4B}z^{\mu+2\Delta}+\overset{sr}{{}^5B}z^{\mu+3\Delta}+\ldots\right)z^{-\nu}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \frac{1}{\alpha}, & \mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\overset{1}{J}, & \mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\overset{2}{J}, & \mp\ldots = r \\ a, & b, & c, & \ldots = s \end{array}\right\}$$

Wird nun die letzte Formel für den darunterſtehenden Zeiger entwickelt, ſo entſteht die erſte Formel der

Auf

Auflösung und löset man in dieser die J in Klassen auf, so erhält man die zweite Formel der Auflösung, folglich sind beide Formeln der Auflösung richtig.

1. Zusatz.

Versteht man wieder, da a der erste Coefficient der Reihe p ist, unter $\overset{+1}{a}$ den zweiten, unter $\overset{+2}{a}$ den dritten, unter $\overset{+3}{a}$ den vierten u. s. f. unter $\overset{+(n-2)}{a}$ den n—1ten, unter $\overset{+(n-1)}{a}$ den nten und unter $\overset{+n}{a}$ den n+1ten Coefficienten der Reihe p, so ist

$$\frac{p}{q}\,7(n+1) = \left.\begin{array}{l} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i\overset{n}{J} \\ \mp \frac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i\overset{n-1}{J} \\ \mp \frac{c}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i\overset{n-2}{J} \\ \mp \cdots\cdots\cdots \\ \mp \frac{\overset{n-2}{a}}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i\overset{2}{J} \\ \mp \frac{\overset{n-1}{a}}{\alpha^{1+*}} \cdot {}_i\overset{1}{J} \\ + \frac{\overset{n}{a}}{\alpha} \end{array}\right\} z^{\mu+n\Delta-\nu}$$

$$\left(\begin{array}{l}1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\end{array}\right)$$

also auch, wenn man $\mu+n\Delta-\nu=\pi$ setzt, gleich

$$-\frac{a\,\overset{n}{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2}+\frac{a\,\overset{n}{b}\mathfrak{B}}{\alpha^3}-\frac{a\,\overset{n}{c}\mathfrak{C}}{\alpha^4}+\dots\dots\mp\frac{a\,\overset{r}{n}\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}\Bigg]z^{\pi}$$

$$-\frac{b\,\overset{n-1}{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2}+\frac{b\,\overset{n-1}{b}\mathfrak{B}}{\alpha^3}-\frac{b\,\overset{n-1}{c}\mathfrak{C}}{\alpha^4}+\dots\mp\frac{\overset{-1}{b}\,\overset{n-1}{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n}}$$

$$-\frac{c\,\overset{n-2}{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2}+\frac{c\,\overset{n-2}{b}\mathfrak{B}}{\alpha^3}-\frac{c\,\overset{n-2}{c}\mathfrak{C}}{\alpha^4}+\dots\mp\frac{\overset{-2}{c}\,\overset{n-2}{n}\overset{-2}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n-1}}$$

$$-\dots\dots,\dots\dots\dots\dots,\dots\dots$$

$$-\frac{\overset{n-3}{a}\,\overset{3}{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2}+\frac{\overset{n-3}{a}\,\overset{3}{b}\mathfrak{B}}{\alpha^3}-\frac{\overset{n-3}{a}\,\overset{3}{c}\mathfrak{C}}{\alpha^4}$$

$$-\frac{\overset{n-2}{a}\,\overset{2}{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2}+\frac{\overset{n-2}{a}\,\overset{2}{b}\mathfrak{B}}{\alpha^3}$$

$$-\frac{\overset{n-1}{a}\,\overset{1}{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2}$$

$$+\frac{\overset{n}{a}}{\alpha}$$

2. *Zusatz.*

Setzt man $\nu = 1$, $\mu = 1$ und $\Delta = 1$, so giebt die Formel der Auflösung, die Formel für $\frac{az + bz^2 + cz^3 + \dots}{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \dots}$.

3. *Zusatz.*

Wird in der Formel der Auflösung, $\nu = 0$ und $\mu = 0$ gesetzt, so entsteht die Formel für $\frac{a + bz^{\Delta} + cz^{2\Delta} + \dots}{\alpha + \beta z^{\Delta} + \gamma z^{2\Delta} + \dots}$

4. Zu-

4. Zusatz.

Substituirt man o für ν, o für μ und 1 für Δ, so wird aus der Formel der Auflösung, die Formel für $\dfrac{a+bz+cz^2+\ldots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\ldots}$

5. Zusatz.

Wird o für μ, o für ν, 1 für Δ, und 1 für α gesetzt, so bekömmt man nach der zweiten Formel der Auflösung,

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{1+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\ldots} = a \left.\begin{matrix} -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^{1}A \\ +\,b \end{matrix}\right\} z$$

$$\left.\begin{matrix} -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^{2}A + a\,\mathfrak{b}\,{}^{2}B \\ -\,b\,\mathfrak{a}\,{}^{1}A \\ +\,c \end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix} -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^{3}A + a\,\mathfrak{b}\,{}^{3}B - a\,\mathfrak{c}\,{}^{3}C \\ -\,b\,\mathfrak{a}\,{}^{2}A + b\,\mathfrak{b}\,{}^{2}B \\ -\,c\,\mathfrak{a}\,{}^{1}A \\ +\,d \end{matrix}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots\end{matrix}\right)$$

Setzt man hier α, β, γ, δ, ε, u. s. f. statt β, γ, δ, ε, ζ u. s. w. so wird

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots} = a \left.\begin{matrix} -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^{1}A \\ +\,b \end{matrix}\right\} z$$

$$\left.\begin{matrix} -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^{2}A + a\,\mathfrak{b}\,{}^{2}B \\ -\,b\,\mathfrak{a}\,{}^{1}A \\ +\,c \end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix} -\,a\,\mathfrak{a}\,{}^{3}A + a\,\mathfrak{b}\,{}^{3}B - a\,\mathfrak{c}\,{}^{3}C \\ -\,b\,\mathfrak{a}\,{}^{2}A + b\,\mathfrak{b}\,{}^{2}B \\ -\,c\,\mathfrak{a}\,{}^{1}A \\ +\,d \end{matrix}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots\end{matrix}\right)$$

6. *Zusatz.*

Werden in die letzte Formel des 5ten Zusatzes statt der positiven $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, u. s. f. die negativen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, u. s. w. substituirt, so werden alle Zeichen der Formel positive (§. 98, 7 Zusatz) und man bekömmt daher

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \ldots} = a + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{a}^{1}A \\ + b \end{matrix}\right\} z$$

$$+ \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{a}^{2}A + a\,\mathfrak{b}^{2}B \\ + b\,\mathfrak{a}^{1}A \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{a}^{3}A + a\,\mathfrak{b}^{3}B + a\,\mathfrak{c}^{3}C \\ + b\,\mathfrak{a}^{2}A + b\,\mathfrak{b}^{2}B \\ + c\,\mathfrak{a}^{1}A \\ + d \end{matrix}\right\} z^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3, \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots}$$

$$= a + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{i}^{1}J \\ + b \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{i}^{2}J \\ + b\,\mathfrak{i}^{1}J \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} a\,\mathfrak{i}^{3}J \\ + b\,\mathfrak{i}^{2}J \\ + c\,\mathfrak{i}^{1}J \\ + d \end{matrix}\right\} z^3 + \text{ u. s. w.}$$

so dass also $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots} \mathbin{7} (n+1) =$

$$\left(a\,\mathfrak{i}^{n}J + b\,\mathfrak{i}^{n-1}J + c\,\mathfrak{i}^{n-2}J + d\,\mathfrak{i}^{n-3}J + \ldots + \overset{n-1}{a}\,\mathfrak{i}^{1}J + \overset{n}{a}\right) z^n \text{ (§. 97. 1. Zus.)}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3, \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots}$$

Bei-

Beispiel.

Es soll $\dfrac{a + bz + cz^2 + \dots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \dots}$ 75 vollständig entwickelt werden.

* * *

Es ist $\dfrac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \dots}$ 75 $=$

$$\left(a\,{}_i^4J + b\,{}_i^3J + c\,{}_i^2J + d\,{}_i^1J + e\right)z^4$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \dots}$$

Construirt man hier statt der einzelnen Klasseninvolutionen eine lexicographische zur Summe 4, so erhält man

$$\underset{\binom{1,\ 2,\ 3,\ \dots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots}}{{}^4J} = \begin{array}{l} \alpha\,|\,\alpha\,|\,\alpha\,|\,\alpha \\ \alpha\,|\,\alpha\,|\,\beta \\ \alpha\,|\,\gamma \\ \beta\,\beta \\ \delta \end{array}$$

folglich ist auch das verlangte Glied gleich

$$\left.\begin{array}{l} a\delta + 2a\alpha\gamma + a\beta^2 + 3a\alpha^2\beta + a\alpha^4 \\ + b\gamma + 2b\alpha\beta + b\alpha^3 \\ + c\beta + c\alpha^2 \\ + d\alpha \\ + e \end{array}\right\} z^4$$

2. *Beispiel.*

Es wird die vollständige Entwickelung der gebrochenen Function $\dfrac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3}$ verlangt.

* * *

Es

Es ist $\dfrac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} =$

$$a \left.\begin{array}{l} + a.i\,{}^{1}J \\ + b \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} + a.i\,{}^{2}J \\ + b.i\,{}^{1}J \\ + c \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} + a.i\,{}^{3}J \\ + b.i\,{}^{2}J \\ + c.i\,{}^{1}J \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} + a.i\,{}^{4}J \\ + b.i\,{}^{3}J \\ + c.i\,{}^{2}J \end{array}\right\} z^4$$

folglich ist auch, da $\underset{\binom{1,\,2,\,3}{\alpha,\,\beta,\,\gamma}}{{}^{*}J} =$

$$\begin{array}{l} '' \; \alpha|\alpha|\alpha|\alpha|\underline{\alpha} \\ '' \; \alpha|\alpha|\alpha|\underline{\beta} \\ '' \; \alpha|\alpha|\underline{\gamma} \\ '' \; \alpha|\underline{\beta\,\beta} \\ '' \; \underline{\beta\,\gamma} \\ '' \; '' \end{array}$$

$$\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} =$$

$$a \left.\begin{array}{l} + a\alpha \\ + b \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} + a\beta + a\alpha^2 \\ + b\alpha \\ + c \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} + a\gamma + 2a\alpha\beta + a\alpha^3 \\ + b\beta + b\alpha^2 \\ + c\alpha \end{array}\right\} z^3$$

$$\left.\begin{array}{l} + 2a\alpha\gamma + a\beta^2 + 3a\alpha^2\beta + a\alpha^4 \\ + b\gamma + 2b\alpha\beta + b\alpha^3 \\ + c\beta + c\alpha^2 \end{array}\right\} z^4 + \ldots\ldots$$

Anmerkung.

In $\underset{\binom{1,\,2,\,3}{\alpha,\,\beta,\,\gamma}}{J}$ dürfen keine Elemente vorkommen die höher sind als γ; wie leicht diese aber vermieden werden können, wird aus der vorgenommenen Entwickelung der $\underset{\binom{1,\,2,\,3}{\alpha,\,\beta,\,\gamma}}{{}^{*}J}$ deutlich erhellen.

 §. 100.

§. 100.

5. *Aufgabe.*

Es soll $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta} + \ldots} = \frac{1}{q}$ in eine Reihe verwandelt werden.

Auflösung.

Es ist $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots} =$

$$\mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} + {}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_a{}^1A_{z^*} \\ + {}_a{}^2A_{z^*} \\ + {}_a{}^3A_{z^*} \\ \text{〃 〃 〃} \end{array}\right. + {}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_b{}^2B_{z^*} \\ + {}_b{}^3B_{z^*} \\ + {}_b{}^4B_{z^*} \\ \text{〃 〃 〃} \end{array}\right.$$

$$+ {}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_c{}^3C + \ldots \\ + {}_c{}^4C_{z^*} \\ + {}_c{}^5C_{z^*} \\ \text{〃 〃 〃} \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots} = (\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots)^{-1}$

Wird hier nun $(\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots)^{-1}$ nach §. 89 entwickelt, so entsteht die in der Auflösung angegebene Reihe, folglich ist diese auch die richtige.

Bei-

Beiſpiel.

Für $\dfrac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta}}$ eine Reihe anzugeben und die Glieder derſelben vollſtändig zu entwickeln.

* * *

Da hier der Nenner begrentzt iſt, ſo wird aus dem obigen Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\ldots\end{matrix}\right)$, der Zeiger $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\end{matrix}\right)$. Für dieſen hat die höchſte Union die Summe 3, die höch- Binion die Summe 6, die höchſte Ternion die Summe 9 u. ſ. f. Es iſt folglich

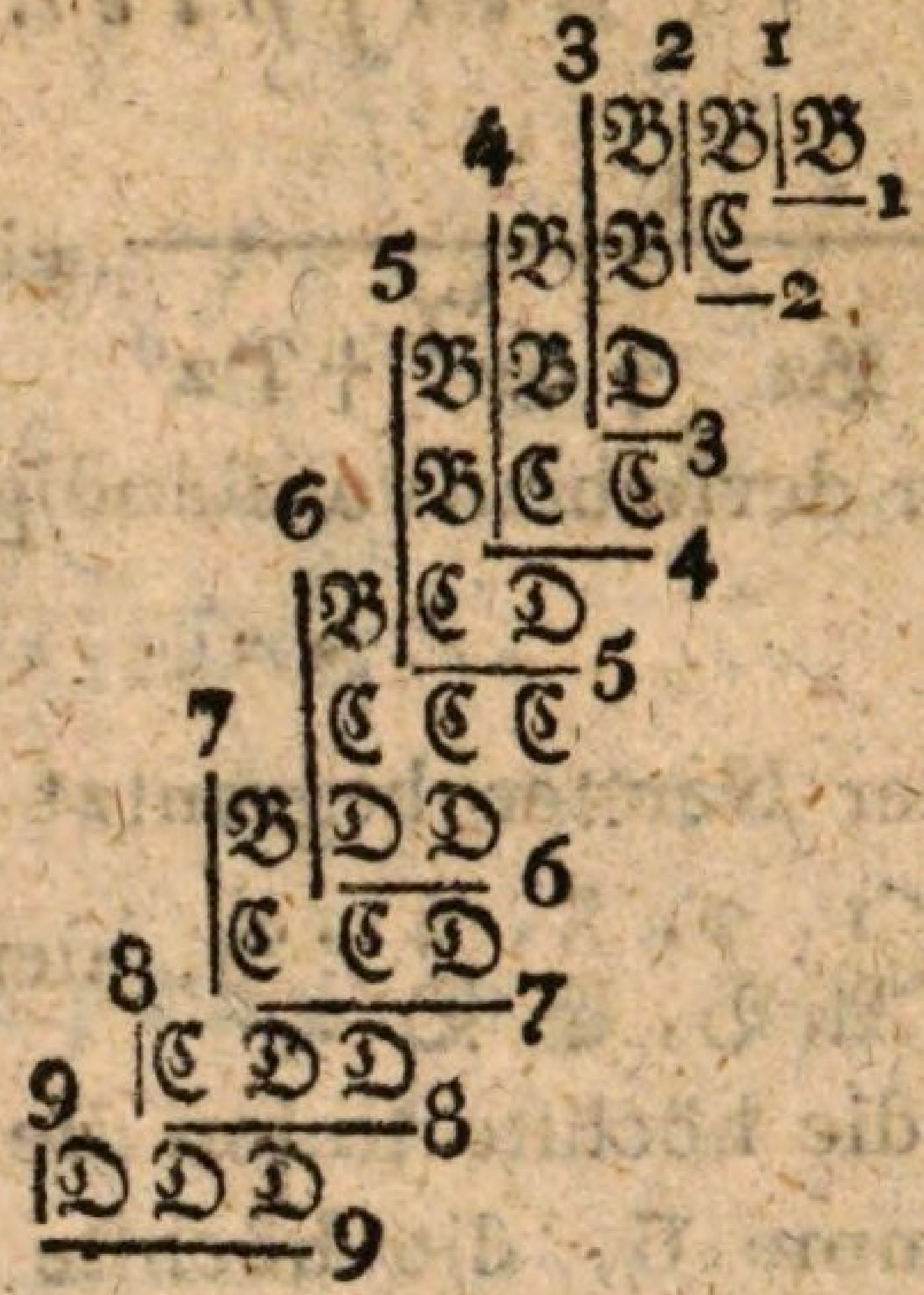
$$\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\mathfrak{D}z^{\delta}} = \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} + {}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\left[\begin{matrix}\mathfrak{a}\,{}^{1}A\,z^{*} \\ \mathfrak{a}\,{}^{2}A\,z^{*} \\ \mathfrak{a}\,{}^{3}A\,z^{*}\end{matrix}\right.$$

$$+ {}^{-1}\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\left[\begin{matrix}\mathfrak{b}\,{}^{2}B\,z^{*} \\ +\mathfrak{b}\,{}^{3}B\,z^{*} \\ +\mathfrak{b}\,{}^{4}B\,z^{*} \\ +\mathfrak{b}\,{}^{5}B\,z^{*} \\ +\mathfrak{b}\,{}^{6}B\,z^{*}\end{matrix}\right. \quad {}^{-1}\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\left[\begin{matrix}\mathfrak{c}\,{}^{3}C\,z^{*} + \ldots \\ +\mathfrak{c}\,{}^{4}C\,z^{*} \\ +\mathfrak{c}\,{}^{5}C\,z^{*} \\ +\mathfrak{c}\,{}^{6}C\,z^{*} \\ +\mathfrak{c}\,{}^{7}C\,z^{*} \\ +\mathfrak{c}\,{}^{8}C\,z^{*} \\ +\mathfrak{c}\,{}^{9}C\,z^{*}\end{matrix}\right.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3 \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\end{matrix}\right)$$

Um die einzelnen Klaſſen zu entwickeln, bediene man ſich folgender abgekürtzten lexicographiſchen Involution: *a*)

a) Die Regeln für die Conſtruction dieſer Involution fallen hier deutlich in die Augen. Sie iſt die abgekürzte Involution von welcher in der Anmerkung des §. 89 geſprochen wird.



so wird die gesuchte Reihe diese seyn:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} z^{-\alpha} - \frac{1}{\mathfrak{A}^2}\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} z^{\beta-2\alpha} \\ + \mathfrak{C} z^{\gamma-2\alpha} \\ + \mathfrak{D} z^{\delta-2\alpha} \end{array}\right. + \frac{1}{\mathfrak{A}^3}\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^2 z^{2\beta-3\alpha} \\ + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} z^{\beta+\gamma-3\alpha} \\ + \mathfrak{B}\mathfrak{D} z^{\beta+\delta-3\alpha} + \mathfrak{C}^2 z^{2\gamma-3\alpha} \\ + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D} z^{\gamma+\delta-3\alpha} \\ + \mathfrak{D}^2 z^{2\delta-3\alpha} \end{array}\right.$$

$$- \frac{1}{\mathfrak{A}^4}\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^3 z^{3\beta-4\alpha} \\ + 3\mathfrak{B}^2\mathfrak{C} z^{2\beta+\gamma-4\alpha} \\ + 3\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} z^{2\beta+\delta-4\alpha} + 3\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 z^{\beta+2\gamma-4\alpha} \\ + 6\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} z^{\beta+\gamma+\delta-4\alpha} + \mathfrak{C}^3 z^{3\gamma-4\alpha} \\ + 3\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 z^{\beta+2\delta-4\alpha} + 3\mathfrak{C}^2\mathfrak{D} z^{2\gamma+\delta-4\alpha} \\ + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 z^{\gamma+2\delta-4\alpha} \\ + \mathfrak{D}^3 z^{3\delta-4\alpha} \end{array}\right. + \ldots\ldots$$

Zusatz

Es ist $\dfrac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots} \;7\,(n+1)$

$$= {}^{-1}\mathfrak{N}\,\mathfrak{A}^{-(n+1)}z^{-(n+1)\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \;\; {}^{n}_{n}\mathfrak{N}z^{*} \\ +n\,{}^{n+1}\mathfrak{N}z^{*} \\ +n\,{}^{n+2}\mathfrak{N}z^{*} \\ + \quad '' \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\; 2,\; 3 \ldots \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots \end{array}\right)$$

§. 101.

6. Aufgabe.

$\dfrac{Az^{a} + Bz^{b} + Cz^{c} + Dz^{d} + \ldots}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta} + \ldots} = \dfrac{p}{q}$ in eine Reihe zu evolviren.

Auflösung.

Es ist $\dfrac{p}{q} = A\mathfrak{A}^{-1}z^{a-\alpha}$

$$- A\mathfrak{A}^{-2}z^{a-\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \;\; {}_{a}{}^{1}Az^{*} \\ + {}_{a}{}^{2}Az^{*} \\ + {}_{a}{}^{3}Az^{*} \\ \;\; '' \; '' \; '' \end{array} \right. + A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \;\; {}_{b}{}^{2}Bz^{*} \\ + {}_{b}{}^{3}Bz^{*} \\ + {}_{b}{}^{4}Bz^{*} \\ \;\; '' \; '' \; '' \end{array} \right. - \begin{array}{l} \text{u.} \\ \text{f.} \\ \text{w.} \end{array}$$

$$+ B\mathfrak{A}^{-1}z^{b-\alpha} \qquad - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \;\; {}_{a}{}^{1}Az^{*} \\ + {}_{a}{}^{2}Az^{*} \\ + {}_{a}{}^{3}Az^{*} \\ \;\; '' \; '' \; '' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{u.} \\ \text{f.} \\ \text{w.} \end{array}$$

$$+ C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\; 2,\; 3,\; 4 \ldots \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q} = p \cdot q^{-1}$, folglich nach §. 95

$$= \overset{\varrho\pi}{{}^{2}\mathfrak{B}} + \overset{\varrho\pi}{{}^{3}\mathfrak{B}} + \overset{\varrho\pi}{{}^{4}\mathfrak{B}} + \overset{\varrho\pi}{{}^{5}\mathfrak{B}} + \overset{\varrho\pi}{{}^{6}\mathfrak{B}} + \overset{\varrho\pi}{{}^{7}\mathfrak{B}} + \overset{\varrho\pi}{{}^{8}\mathfrak{B}} + \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ q^{-1}\urcorner 1, & q^{-1}\urcorner 2, & q^{-1}\urcorner 3, & \ldots = \pi \\ p\urcorner 1, & p\urcorner 2, & p\urcorner 3, & \ldots = \varrho \end{array}\right\}$$

$$= p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 1 \Big\} + \left.\begin{array}{l} p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 2 \\ + p\urcorner 2 . q^{-1}\urcorner 1 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 3 \\ + p\urcorner 2 . q^{-1}\urcorner 2 \\ + p\urcorner 3 . q^{-1}\urcorner 1 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} p\urcorner 1 . q^{-1}\urcorner 4 \\ + p\urcorner 2 . q^{-1}\urcorner 3 \\ + p\urcorner 3 . q^{-1}\urcorner 2 \\ + p\urcorner 4 . q^{-1}\urcorner 1 \end{array}\right\} + \cdots$$

Es ist aber nach §. 100 (Aufg. Aufl.), wenn man statt der Binominalcoefficienten sogleich ihre Werthe setzt und $'\mathfrak{A}$ für ${}_{a}{}^{1}\mathrm{A} + {}_{a}{}^{2}\mathrm{A} + {}_{a}{}^{3}\mathrm{A} + \cdots$, und $'\mathfrak{B}$ für ${}_{b}{}^{2}\mathrm{B} + {}_{b}{}^{3}\mathrm{B} + {}_{b}{}^{4}\mathrm{B} + \cdots$ schreibt u. s. w.

$$q^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,'\mathfrak{A}_{z^*} + \mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\,'\mathfrak{B}_{z^*}$$
$$- \mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\,'\mathfrak{C}_{z^*} + \ldots,$$

folglich ist auch pq^{-1}

$$= Az^{a} . \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - Az^{a} . \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,'\mathfrak{A}_{z^*}$$
$$+ Bz^{b} . \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha}$$

$$+ Az^{a} . \mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\,'\mathfrak{B}_{z^*} - \text{''}$$
$$- Bz^{b} . \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,'\mathfrak{A}_{z^*} + \text{''}$$
$$+ Cz^{c} . \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} \qquad - \text{''}$$

=

$$= A\mathfrak{A}^{-1}z^{a-\alpha} - A\mathfrak{A}^{-2}z^{a-2\alpha}\,{}'\mathcal{A}z^* + A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\,{}'\mathcal{B}z^* - \text{u.}$$
$$+ B\mathfrak{A}^{-1}z^{b-\alpha} \quad - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\,{}'\mathcal{A}z^* + \text{f.}$$
$$+ C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha} \quad - \text{w.}$$

Subſtituirt man hierinn für $'\mathcal{A}$ wieder den Werth $_a{}^1A + {}_a{}^2A + {}_a{}^3A + \ldots$; für $'\mathcal{B}$ den Werth $_b{}^1B + {}_b{}^2B + {}_b{}^3B + \ldots\ldots$, ſo entſteht die Formel der Auflöſung.

Zuſatz.

Bezeichnet man hier das n—1te Glied der Reihe p mit $\overset{n-2}{A}$, das nte mit $\overset{n-1}{A}$ und das n+1te mit $\overset{n}{A}$ u. ſ. f. und bezeichnet eben ſo den Exponenten des n—1ten Gliedes der Reihe p mit $\overset{n-2}{a}$, den Exponenten des nten Gliedes mit $\overset{n-1}{a}$ und den Exponenten des n+1ten Gliedes mit $\overset{n}{a}$, ſo iſt

$$\frac{p}{q}\,7\,(n+1)$$

$$= A\mathfrak{A}^{-(n+1)}z^{a-(n+1)\alpha}\,{}'\overset{0}{\mathcal{N}}z^* - B\mathfrak{A}^{-n}z^{b-n\alpha}\,{}'\overset{-1}{\mathcal{N}}z^* +$$
$$C\mathfrak{A}^{-(n-1)}z^{c-(n-1)\alpha}\,{}'\overset{-2}{\mathcal{N}}z^* \ldots \mp \overset{n-2}{A}\mathfrak{A}^{-3}\,\overset{n-2}{z^{a}}{}^{-3\alpha}\,{}'\mathcal{B}z^*$$
$$+ \overset{n-1}{A}\mathfrak{A}^{-2}\overset{n-1}{z^{a}}{}^{-2\alpha}\,{}'\mathcal{A}z^* \mp \overset{n}{A}\mathfrak{A}^{-1}\overset{n}{z^{a}}{}^{-\alpha}.$$

Löſet man nun die Variationsklaſſen dieſer Formel in Combinationsklaſſen zu beſtimmten Summen auf, ſo erhält man für das n+1te Glied einen ſolchen Ausdruck als die Auflöſung der 6ten Aufgabe für $\frac{p}{q}$ überhaupt giebt.

Beispiel.

Das dritte Glied des $\dfrac{Az^a + Bz^b + Cz^c}{\mathfrak{A}z^\alpha + \mathfrak{B}z^\beta + \mathfrak{C}z^\gamma}$ zu entwickeln.

* * *

Es ist $\dfrac{Az^a + Bz^b + Cz^c}{\mathfrak{A}z^\alpha + \mathfrak{B}z^\beta + \mathfrak{C}z^\gamma} 73 =$

$$A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_b{}^2B z^* \\ + {}_b{}^3B z^* \\ + {}_b{}^4B z^* \end{array}\right. - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}_a{}^1A z^* \\ + {}_a{}^2A z^* \end{array}\right. + C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1, & 2 \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{C} \end{array}\right)$$

$$= A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}^2z^{2\beta} \\ + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{\beta+\gamma} \\ + \mathfrak{C}^2z^{2\gamma} \end{array}\right. - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}z^\beta \\ + \mathfrak{C}z^\gamma \end{array}\right. + C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$= \frac{A}{\mathfrak{A}^3}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}^2z^{a+2\beta-3\alpha} \\ + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{a+\beta+\gamma-3\alpha} \\ + \mathfrak{C}^2z^{a+2\gamma-3\alpha} \end{array}\right. - \frac{B}{\mathfrak{A}^2}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}z^{b+\beta-2\alpha} \\ + \mathfrak{C}z^{b+\gamma-2\alpha} \end{array}\right. + \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{c-\alpha}$$

§. 102.

7. Aufgabe.

Es soll $\dfrac{(Az^\mu + Bz^{\mu+\Delta} + Cz^{\mu+2\Delta} + \ldots)^m}{(\alpha z^\nu + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots)^n} = \dfrac{p^m}{q^n}$ unter der Bedingung entwickelt werden, daſs unter m eine ganze positive Zahl gedacht wird.

Auf-

Auflösung.

Wenn man $m\mu - \nu = \Sigma$ setzt, so ist $\frac{p^m}{q^n} =$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha} z^{\Sigma} + {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1} \, {}^{1}_{a}\overset{\varrho}{A} \\ \qquad + {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha-n} \end{array}\right\} z^{\Sigma+\Delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left\{\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1} \, {}^{2}_{a}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2} \, {}^{2}_{b}\overset{\varrho}{B} \end{array}\right\} \\ + {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \; {}^{-2}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1} \, {}^{1}_{a}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{m+2}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha-n} \end{array}\right\} z^{\Sigma+2\Delta} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ A,\ B,\ C,\ \ldots = \sigma \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots = \varrho \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p^m}{q^n} = p^m \cdot \frac{1}{q^n} = p^m \cdot q^{-n}$, folglich nach §. 95

$$= {}^{2}\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^{3}\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^{4}\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^{5}\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^{6}\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^{7}\overset{\upsilon\tau}{B} + {}^{8}\overset{\upsilon\tau}{B} + \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ q^{-n}7_1, & q^{-n}7_2, & q^{-n}7_3, & \ldots = \tau \\ p^m7_1, & p^m7_2, & p^m7_3, & \ldots = \upsilon \end{array}\right\}$$

=

$$
\begin{array}{llll}
= p^{m}7_{1}.q^{-n}7_{1} + p^{m}7_{1}.q^{-n}7_{2} \Big\} & + p^{m}7_{1}.q^{-n}7_{3} \Big\} & + p^{m}7_{1}.q^{-n}7_{4} \Big\} & + \dots \\
\quad + p^{m}7_{2}.q^{-n}7_{1} \Big\} & + p^{m}7_{2}.q^{-n}7_{2} & + p^{m}7_{2}.q^{-n}7_{3} & \\
 & + p^{m}7_{3}.q^{-n}7_{1} \Big\} & + p^{m}7_{3}.q^{-n}7_{2} & \\
 & & + p^{m}7_{4}.q^{-n}7_{1} \Big\} &
\end{array}
$$

Nach §. 86 ist aber

$$
p^{m} = m^{\,m}\mathfrak{M}z^{m\mu} + m^{\,m+1}\mathfrak{M}z^{m\mu+\Delta} + m^{\,m+2}\mathfrak{M}z^{m\mu+2\Delta} + \dots
$$

$$
\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots}{A,\ B,\ C,\ D, \dots = \sigma}
$$

und nach §. 87 ist

$$
\begin{array}{l}
q^{-n} = \alpha^{-n}z^{-n\nu} \\
+ {}^{-n}\mathfrak{A}\alpha^{-n-1}\,{}_{a}^{1}A\,z^{-n\nu+\Delta} + \left.\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}\alpha^{-n-1}\,{}_{a}^{2}B \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}\alpha^{-n-2}\,{}_{b}^{2}B \end{array}\right\} z^{-n\nu+2\Delta} \quad \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

$$
\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon, \dots = \varrho}
$$

Substituirt man nun in die vorhin angegebene Localformel für die Localzeichen diejenigen Glieder dieser beiden Reihen, welche sie repräsentiren, setzt Σ statt $m\mu - n\nu$ und ordnet den dadurch erhaltenen Ausdruck gehörig, so bekömmt man die Formel der Auflösung.

1. Zu-

1. *Zusatz.* a)

Es ist $\frac{p^m}{q^n}\, 7p+1 =$

$$ {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left[\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{p}_{a}A \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}^{p}_{b}B \\ + {}^{-n}\mathfrak{C}_{\alpha-n-3}\,{}^{p}_{c}C \\ + \;\; '' \;\; '' \;\; '' \;\; '' \\ + {}^{-n}\overset{0}{\mathfrak{P}}_{\alpha-n-p}\,{}^{0\,p}_{p}\overset{0}{P} \end{array}\right] + {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left[\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{p-1}_{a}A \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}^{p-1}_{b}B \\ + {}^{-n}\mathfrak{C}_{\alpha-n-3}\,{}^{p-1}_{c}C \\ + \;\; '' \;\; '' \;\; '' \;\; '' \\ + {}^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{P}}_{\alpha-n-(p-1)}\,{}^{-1\,p-1}_{p}\overset{-1}{P} \end{array}\right] + \cdots $$

$$ + {}^{m+(p-2)}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \left\{\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{2}_{a}A \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}^{2}_{b}B \end{array}\right\} + {}^{m+(p-1)}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\,{}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{1}_{a}A $$

$$ + {}^{m+p}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}_{\alpha-n} \Big\}\, z^{\Sigma+p\Delta} $$

$(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots = \sigma)$ $(\overset{1}{\beta}, \overset{2}{\gamma}, \overset{3}{\delta}, \ldots)$

2. *Zusatz.*

Wird $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\Delta = 1$ und $\alpha = 1$ gesetzt, so erhält man

$$ \frac{(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^m}{(1 + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots)^n} = $$

$$ {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} + \left.\begin{array}{l} {}^{m}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\,.\,{}^{-n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{1}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{m+1}_{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \end{array}\right\} z + $$

+Σ

a) $\overset{0}{P}$ bedeutet hier die pte also $\overset{-1}{P}$ die p−1te Klasse.

$$
\left.\begin{array}{l}
+\ {}_{m}^{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\left[\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^{2}\overset{\rho}{A} \\ {}^{-n}_{+}\mathfrak{B}_b{}^{2}\overset{\rho}{B} \end{array}\right] \\
+\ {}_{m}^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} . {}^{-n}\mathfrak{A}_a{}^{1}\overset{\rho}{A} \\
+\ {}_{m}^{m+2}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}
\end{array}\right| z^2 + \ldots \quad \binom{1,2,3,\ldots}{A,B,C,\ldots=\sigma}\binom{1,2,3,\ldots}{\beta,\gamma,\delta,\ldots=\rho}
$$

3. *Zusatz.*

Setzt man im zweiten Zusatze $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, u. s. f. statt $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, u. s. w, so werden die Klassen eines ungraden Klassenexponenten, welche sich auf ρ beziehn, negativ und folglich ist

$$
\frac{(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots)^m}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \delta z^3 - \ldots)^n} =
$$

$$
{}_{m}^{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} + \left.\begin{array}{l} {}_{m}^{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} . {}^{-n}_{-}\mathfrak{A}_a{}^{1}A \\ +\ {}_{m}^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} \end{array}\right| z +
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
{}_{m}^{m}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}\left[\begin{array}{l} {}^{-n}_{-}\mathfrak{A}_a{}^{2}\overset{\rho}{A} \\ {}^{-n}_{+}\mathfrak{B}_b{}^{2}\overset{\rho}{B} \end{array}\right] \\
+\ {}_{m}^{m+1}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}} . {}^{-n}_{-}\mathfrak{A}_a{}^{1}\overset{\rho}{A} \\
+\ {}_{m}^{m+2}\overset{\sigma}{\mathfrak{M}}
\end{array}\right| z^2 + \ldots \quad \binom{1,2,3,\ldots}{A,B,C,\ldots=\sigma}\binom{1,2,3,\ldots}{\alpha,\beta,\gamma,\ldots=\rho}
$$

4. Zu-

4. Zusatz.

Substituirt man im 3ten Zusatze 1 für m, so wird $\mathfrak{M} = A$ und folglich ist

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots)^n} =$$

$${}^{1}_{a}\overset{\sigma}{A} + \left.\begin{array}{l} {}^{1}_{a}\overset{\sigma}{A} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_a\,{}^{1}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{2}_{a}\overset{\sigma}{A} \end{array}\right\} z +$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{1}_{a}\overset{\sigma}{A} \cdot \left[\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_a\,{}^{2}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_b\,{}^{2}\overset{\varrho}{B} \end{array}\right] \\ + {}^{2}_{a}\overset{\sigma}{A} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_a\,{}^{1}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{3}_{a}\overset{\sigma}{A} \end{array}\right] z^2 + \left.\begin{array}{l} {}^{1}_{a}\overset{\sigma}{A} \cdot \left[\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_a\,{}^{3}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_b\,{}^{3}\overset{\varrho}{B} \\ - {}^{-n}\mathfrak{C}_c\,{}^{3}\overset{\varrho}{C} \end{array}\right] \\ + {}^{2}_{a}\overset{\sigma}{A} \cdot \left[\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_a\,{}^{2}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_b\,{}^{2}\overset{\varrho}{B} \end{array}\right] \\ + {}^{3}_{a}\overset{\sigma}{A} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_a\,{}^{1}\overset{\varrho}{A} \\ + {}^{4}_{a}\overset{\sigma}{A} \end{array}\right] z^3 + \ldots$$

$$= \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ A,\ B,\ C,\ \ldots = \sigma \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots = \varrho \end{array}\right)$$

Bei-

Beispiel.

Die ersten vier Glieder der Reihe für $\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+..}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-..)^3}$ vollständig zu entwickeln.

* * *

Die lexicographische Involution $\begin{array}{l} \alpha|\alpha|\underline{\alpha} \\ \alpha|\underline{\beta} \\ \gamma \end{array}$ begreift alle hier nöthige Klassen für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots}$ in sich.

Es ist daher

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+..}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-..)^3} = A + \left.\begin{array}{l} 3A\alpha \\ +B \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} 3A\beta \\ +6A\alpha^2 \\ +3B\alpha \\ +C \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} 3A\gamma \\ +6A\alpha\beta \\ +10A\alpha^3 \\ +3B\beta \\ +6B\alpha^2 \\ +3C\alpha \\ +D \end{array}\right\} z^3 + .$$

5. *Zusatz.*

Werden im vierten Zusatze die Coefficienten β, γ, δ, u. s. f. gleich Null gesetzt, so wird

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdot\cdot}{(1-\alpha z)^n} = {}_a^{1}\overset{\sigma}{A} - \left.\begin{array}{l} {}_a^{1}\overset{\sigma}{A} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}\, {}_a^{1}\overset{\varrho}{A} \\ + {}_a^{2}\overset{\sigma}{A} \end{array}\right\} z$$

+

$$
\left.\begin{array}{l}
+{}_a^{1}\overset{\sigma}{A}\cdot^{--n}\mathfrak{B}_b\,{}^{2}\overset{\varrho}{B}\\
-{}_a^{2}\overset{\sigma}{A}\cdot^{--n}\mathfrak{A}_a\,{}^{1}\overset{\varrho}{A}\\
+{}_a^{3}\overset{\sigma}{A}
\end{array}\right\} z^2
\left.\begin{array}{l}
-{}_a^{1}\overset{\sigma}{A}\cdot^{--n}\mathfrak{C}_c\,{}^{3}\overset{\varrho}{C}\\
+{}_a^{2}\overset{\sigma}{A}\cdot^{--n}\mathfrak{B}_b\,{}^{2}\overset{\varrho}{B}\\
-{}_a^{3}\overset{\sigma}{A}\cdot^{--n}\mathfrak{A}_a\,{}^{1}\overset{\varrho}{A}\\
+{}_a^{4}\overset{\sigma}{A}
\end{array}\right\} z^3 + \ldots\quad
\left(\begin{array}{l}1,2,3\ldots\\ A,B,C\ldots=\sigma\end{array}\right)
\left(\begin{array}{l}1\\ a=\varrho\end{array}\right)
$$

Beispiel.

Es soll $\dfrac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots}{(1-\alpha z)^4}$ vollständig entwickelt werden.

* * *

Es ist $\dfrac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots}{(1-\alpha z)^4} =$

$$
\left.\begin{array}{l} A + 4A\alpha\\ +B \end{array}\right\} z
\left.\begin{array}{l} + 10A\alpha^2\\ +4B\alpha\\ +C \end{array}\right\} z^2
\left.\begin{array}{l} + 20A\alpha^3\\ +10B\alpha^2\\ +4C\alpha\\ +D \end{array}\right\} z^3
\left.\begin{array}{l} + 35A\alpha^4\\ +20B\alpha^3\\ +10C\alpha^2\\ +4D\alpha\\ +E \end{array}\right\} z^4 + \cdots
$$

6. *Zusatz.*

Es ist $\dfrac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1-\alpha z)^n}$ ⁊ $(m+1) =$

$$\left(\mp{}_a^1\overset{\sigma}{A}.^{-n}\overset{o}{\mathfrak{M}}{}_m^m\overset{o}{\mathcal{M}}\mp{}_a^2\overset{\sigma}{A}.^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}{}_m^{-1}{}^{m-1}\overset{-1}{\mathcal{M}}\mp\right.$$

$${}_a^3\overset{\sigma}{A}.^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}{}_m^{-2}{}^{m-2}\overset{-2}{\mathcal{M}}\mp{}''{}''-{}_a^{m-2}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\mathfrak{C}_c^3C+$$

$$\left.{}_a^{m-1}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\mathfrak{B}_b^2B-{}_a^m\overset{\sigma}{A}.^{-n}\mathfrak{A}_a^1A+{}_a^{m+1}\overset{\sigma}{A}\right)z^m$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{A,\ B,\ C\ldots=\sigma}\quad\binom{1}{\alpha}$$

$$=\left(\mp{}_a^1A\dot{.}^{-n}\overset{o}{\mathfrak{M}}\alpha^m\mp{}_a^2A\dot{.}^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-1}\mp{}_a^3A\dot{.}^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-2}\right.$$

$$\mp{}''{}''-{}_a^{m-2}A\dot{.}^{-n}\mathfrak{C}\alpha^3+{}_a^{n-1}A\dot{.}^{-n}\mathfrak{B}\alpha^2-{}_a^mA\dot{.}^{-n}\mathfrak{A}\alpha$$

$$\left.+{}_a^{m+1}A\right)z^m$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{A,\ B,\ C,\ \ldots}$$

Soll der Zähler der gebrochnen Zahl mit dem nten Gliede, alſo mit $\overset{n-1}{A}z^{n-1}$ abbrechen, ſo bricht das m+1te Glied der Reihe dieſer gebrochnen Zahl mit dem Theile ab, in welchem ${}_a^n A$ vorkömmt. Es iſt folglich

$$\frac{A+\mathfrak{B}z+Cz^2+Dz^3+\ldots\ \overset{n-1}{A}z^{n-1}}{(1-\alpha z)^n}\,7\,(m+1)=$$

$$\left(\mp{}_a^1A\dot{.}^{-n}\overset{o}{\mathfrak{M}}\alpha^m\mp{}_a^2A\dot{.}^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-1}\mp{}_a^3A\dot{.}^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-2}\mp{}''\right.$$

$$\left.{}''\mp{}_a^nA\dot{.}^{-n}\overset{-(n-1)}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-(n-1)}\right)z^m$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n}{A,\ B,\ C\ \ldots\ \overset{n-1}{A}}$$

An-

Anmerkung.

In beiden Formeln für das $m+1$te Glied wird aus $\mp$ das Zeichen $+$ wo der Exponent der α eine grade Zahl ist, hingegen wo der Exponent der α eine ungrade Zahl ist, wird aus $\mp$ das Zeichen $-$.

Beispiel.

Es soll $\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3}{(1-\alpha z)^4}$ 76 vollständig entwickelt werden.

* * *

Da hier ${}^{n}\mathrm{A} = {}^{4}\mathrm{A}$, so ist nach der letzten Formel das gesuchte Glied gleich

$$\left(-{}_{a}^{1}\mathrm{A}.{}^{-4}\mathfrak{E}\alpha^5 + {}_{a}^{2}\mathrm{A}.{}^{-4}\mathfrak{D}\alpha^4 - {}_{a}^{3}\mathrm{A}.{}^{-4}\mathfrak{C}\alpha^3 + {}_{a}^{4}\mathrm{A}.{}^{-4}\mathfrak{B}\alpha^2\right)z^5$$

$$= (56A\alpha^5 + 35B\alpha^4 + 20C\alpha^3 + 10D\alpha^2)z^5$$

VI. Umkehrung der Reihen.

Rückkehrende Formeln. a)

§. 103.

1. *Aufgabe.*

Es wird die Gleichung gegeben

$$z = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + dx^{\varrho+3\delta} + \ldots\ldots\ldots,$$

es soll x^{σ} durch eine fortlaufende Reihe ausgedrückt werden, welche nach den Potenzen der z fortläuft.

U 2 *Auf-*

a) Unter Rückehrenden Formeln werden solche verstanden, bei welchen allemal ein Glied durch alle vorhergehende bestimmt wird.

Auflösung.

Bezeichnet man die Reihe $ax^{\varrho}+bx^{\varrho+\delta}+cx^{\varrho+2\delta}+ \ldots$ mit p und setzt $x^{\sigma}=\dot{\mathfrak{A}}z^{\frac{\sigma}{\varrho}}+\dot{\mathfrak{B}}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}+\dot{\mathfrak{C}}z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}+\dot{\mathfrak{D}}z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}+\ldots$, und bestimmt die angenommenen Coefficienten dieser Reihe durch Localzeichen, welche sich auf die Coefficienten der $\frac{\sigma}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}$ten Dignität der Reihe p beziehn, so ist

$$x^{\sigma}7\,1=\frac{1}{p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma}{\varrho}},\quad x^{\sigma}7\,2=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k2\right)}{p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}},$$

$$x^{\sigma}7\,3=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k3+\dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k2\right)}{p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}},$$

$$x^{\sigma}7\,4=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k4+\dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k3+\dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k2\right)}{p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}k1}z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}$$

a) Scale p (a, b, c, d, ...)

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

Be-

a) Die Scale ist hier p (a, b, c, d, ...), weil die Coefficienten der höhern Dignitäten der Reihe p durch die Coefficienten der p bestimmt werden.

Beweis.

Es ist nach §. 87

$$p^{\frac{\sigma}{\varrho}} = p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma} + p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k_2 . x^{\sigma+\delta} + p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k_3 . x^{\sigma+2\delta} + \dots$$

$$p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} = p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma+\delta} + p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k_2 . x^{\sigma+2\delta} + p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k_3 . x^{\sigma+3\delta} + \dots$$

$$p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} = p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma+2\delta} + p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k_2 . x^{\sigma+3\delta} + p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k_3 . x^{\sigma+4\delta} + \dots$$

$$p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} = p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma+3\delta} + p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k_2 . x^{\sigma+4\delta} + p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k_3 . x^{\sigma+5\delta} + \dots$$

" " " "

Werden diese Reihen der $p^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, $p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ u. s. f. statt $z^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, $z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$, u. s. w. in die für x^{σ} angenommene Reihe $x^{\sigma} = \dot{\mathfrak{A}} z^{\frac{\sigma}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{B}} z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{C}} z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \dots$ gesetzt, so erhält man

$$x^{\sigma} = \dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma} + \dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k_2 . x^{\sigma+\delta} + \dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k_3 . x^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{B}} p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma+\delta} + \dot{\mathfrak{B}} p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k_2 . x^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{C}} p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k_1 . x^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k4 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{B}} p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k3 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{C}} p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k2 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{D}} p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k1 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

Bringt man hier x^{σ} auf die andere Seite, reducirt alſo die Gleichung auf Null, ſo wird

$$\dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k1 - 1 = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k2 + \dot{\mathfrak{B}} p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k1 = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k3 + \dot{\mathfrak{B}} p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k2 + \dot{\mathfrak{C}} p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k1 = 0$$

$$\dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k4 + \dot{\mathfrak{B}} p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k3 + \dot{\mathfrak{C}} p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k2 + \dot{\mathfrak{D}} p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k1 = 0$$

u. ſ. w. u. ſ. w. u. ſ. w.

folglich iſt

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k1}, \quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}} p^{\frac{\sigma}{\varrho}} k2}{p^{\frac{\sigma\ \delta}{\varrho}} k1},$$

$$\dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k2}{p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k1},$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k2}{p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}k1},$$

u. ſ. w u. ſ. w. u. ſ. w.

Subſtituirt man nun dieſe Werthe der $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. f. in die Gleichung $x^\sigma = \dot{\mathfrak{A}}z^{\frac{\sigma}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{B}}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + \dot{\mathfrak{C}}z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \dots$ ſo bekömmt man die in der Auflöſung angegebenen Glieder.

Zuſatz

Wird ϱ gleich 1 und δ gleich 1 angenommen, ſo wird aus der Gleichung der Aufgabe die Gleichung $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$ und

$$x^\sigma = \frac{1}{p^\sigma k1}z^\sigma - \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^\sigma k2)}{p^{\sigma+1}k1}z^{\sigma+1} - \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^\sigma k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\sigma+1}k2)}{p^{\sigma+2}k1}z^{\sigma+2}$$

$$- \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^\sigma k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\sigma+1}k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\sigma+2}k2)}{p^{\sigma+3}k1}z^{\sigma+3} - \dots \textit{a)}$$

a) Der erſte Coefficient dieſer Reihe iſt alſo wieder $\dot{\mathfrak{A}}$, der zweite iſt $\dot{\mathfrak{B}}$, der dritte iſt $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. w.

1. Beispiel.

Es sey $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$, es soll x^3 durch z bestimmt werden.

* * *

Es ist, da hier $\sigma = 3$,

$$x^3 = \frac{1}{p^3 k1} z^3 - \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3 k2)}{p^4 k1} z^4 - \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3 k3 + \dot{\mathfrak{B}} p^4 k2)}{p^5 k1} z^5 -$$
$$- \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3 k4 + \dot{\mathfrak{B}} p^4 k3 + \dot{\mathfrak{C}} p^5 k2)}{p^6 k1} \cdot z^6 - \text{u. s. w.}$$

Nach §. 68. Zusatz ist aber

$$p^3k1 = {}_c{}^3C,\ p^3k2 = {}_c{}^4C,\ p^3k3 = {}_c{}^5C,\ p^3k4 = {}_c{}^6C,$$
$$p^4k1 = {}_d{}^4D, p^4k2 = {}_d{}^5D, p^4k3 = {}_d{}^6D, p^5k1 = {}_e{}^5E,$$
$$p^5k2 = {}_e{}^6E, p^6k1 = {}_f{}^6F, \text{ u. s. w.}$$
$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4, \ldots \\ a, b, c, d, \ldots\end{pmatrix}$$

folglich ist auch

$$x^3 = \frac{1}{{}_e{}^3C} z^3 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\, {}_c{}^4C}{{}_d{}^4D} z^4 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\, {}_c{}^5C + \dot{\mathfrak{B}}\, {}_d{}^5D}{{}_e{}^5E} z^5 -$$
$$- \frac{\dot{\mathfrak{A}}\, {}_c{}^6C + \dot{\mathfrak{B}}\, {}_d{}^6D + \dot{\mathfrak{C}}\, {}_e{}^6E}{{}_f{}^6F} z^6 - \text{u. s. w.}$$
$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots\end{pmatrix}$$

Sollen in der eben entwickelten Reihe die Factoren $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. w. durch Klassenzeichen für den Zeiger $\begin{pmatrix}1, 2, 3, \ldots \\ a, b, c, \ldots\end{pmatrix}$ bestimmt werden, so kann dies leicht geschehn,

schehn, weil $\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{{}_c\overset{3}{C}}$ ist. Substituirt man nämlich diesen Werth des $\dot{\mathfrak{A}}$, für $\dot{\mathfrak{A}}$ in den Coefficienten des zweiten Gliedes, so hat man auch den zweiten Coefficienten, also $\dot{\mathfrak{B}}$ bestimmt; setzt man daher diesen Werth des $\dot{\mathfrak{B}}$ und den vorher angegebenen des $\dot{\mathfrak{A}}$ wieder statt $\dot{\mathfrak{B}}$ und $\dot{\mathfrak{A}}$ in den Coefficienten des dritten Gliedes, so ist auch dieser, folglich $\dot{\mathfrak{C}}$ bestimmt. u. s. w.

2. *Beispiel.*

Es soll unter der Bedingung, dass $z = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$, x durch z bestimmt werden.

* * *

Die hierhergehörige Formel erhält man, wenn in der Formel des Zusatzes $\sigma = 1$ gesetzt wird. Es ist also

$$x = \frac{1}{p^1k1}.z - \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k2}{p^2k1}.z^2 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k3 + \dot{\mathfrak{B}}p^2k2}{p^3k1}.z^3$$
$$- \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k4 + \dot{\mathfrak{B}}p^2k3 + \dot{\mathfrak{C}}p^3k2}{p^4k1}.z^4 - \text{u. s. w.}$$

Es ist aber

$$p^1k1 = {}_a\overset{1}{A},\ p^1k2 = {}_a\overset{2}{A},\ p^1k3 = {}_a\overset{3}{A},\ p^1k4 = {}_a\overset{4}{A},$$
$$p^2k1 = {}_b\overset{2}{B},\ p^2k2 = {}_b\overset{3}{B},\ p^2k3 = {}_b\overset{4}{B},\ p^3k1 = {}_c\overset{3}{C},$$
$$p^3k2 = {}_c\overset{4}{C},\ p^4k1 = {}_d\overset{4}{D}.$$

Folglich ist auch

$$x = \frac{1}{{}_a\overset{1}{A}}.z - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_a\overset{2}{A}}{{}_b\overset{2}{B}}.z^2 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}\,{}_a\overset{3}{A} + \dot{\mathfrak{B}}\,{}_b\overset{3}{B}}{{}_c\overset{3}{C}}.z^3$$

$$-\frac{\mathfrak{\dot{A}}_a{}^4A + \mathfrak{\dot{B}}_b{}^4B + \mathfrak{\dot{C}}_c{}^4C}{{}_d{}^4D} . z^4 - \ldots$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ \ldots}$$

Anmerkung.

Die Formeln der Auflösung der gegebenen Aufgabe erhält man, wie aus dem Beweise erhellet, wenn man für x^σ die Reihe $\mathfrak{A}z^{\frac{\sigma}{\varrho}} + \mathfrak{B}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + \mathfrak{C}z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \ldots\ldots$ annimmt und die willkührlich angenommenen Coefficienten dieser Reihe dadurch bestimmt, dass man die gegebene Reihe $ax^\delta + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+\delta} + \ldots$ zur $\frac{\sigma}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$ten Dignität erhebt u. s. w. und die Reihen die man dadurch bekömmt in die angenommene statt $z^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, substituirt u. s. f. Diese Methode ist zuerst von Hindenburg beobachtet. Eine andere welche von Moivre herrührt, wird ein Beispiel deutlich machen: Wenn nämlich $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$ und hier x durch eine Reihe bestimmt werden soll, die nach Potenzen der z fortschreitet, so nimmt man willkührlich, wie bei der Hindenburgischen Methode, $x = \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \cdots$ an, substituirt hierauf aber nicht die Potenzen der gegebenen Reihe in die angenommene, sondern man setzt die erste, zweite, dritte, vierte Potenz u. s. w. der angenommenen Reihe, statt x, x^2, x^3, u. s. f. in die gegebene.

Hier-

Hierdurch wird alſo

$$
\begin{aligned}
z = {} & a\dot{\mathfrak{A}}z + a\dot{\mathfrak{B}}z^2 + a\dot{\mathfrak{C}}z^3 + a\dot{\mathfrak{D}}z^4 + \ldots \\
& \quad b\,\mathfrak{b}\,{}^{2}B z^2 + b\,\mathfrak{b}\,{}^{3}B z^3 + b\,\mathfrak{b}\,{}^{4}B z^4 + \ldots \\
& \qquad + c\,\mathfrak{c}\,{}^{3}C z^3 + c\,\mathfrak{c}\,{}^{4}C z^4 + \ldots \\
& \qquad\qquad + d\,\mathfrak{d}\,{}^{4}D z^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, \ldots \end{matrix}\right)$$

Reducirt man nun dieſe Gleichung dadurch auf o daſs man z auf die andere Seite bringt und wird alsdenn nach und nach die Summe der Coefficienten, die zu einerlei Dignitäten der z gehören, gleich o geſetzt, ſo bekömmt man Gleichungen aus welchen ſich folgende Werthe für die angenommenen Coefficienten ergeben:

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a},\ \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{b\,\mathfrak{b}\,{}^{2}B}{a},\ \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{b\,\mathfrak{b}\,{}^{3}B + c\,\mathfrak{c}\,{}^{3}C}{a}$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{b\,\mathfrak{b}\,{}^{4}B + c\,\mathfrak{c}\,{}^{4}C + d\,\mathfrak{d}\,{}^{4}D}{a}, \text{ u. ſ. f.}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}} \ldots \end{matrix}\right)$$

In dem gegebenen 1ten und 2ten Beiſpiele müſſen die Klaſſen für den Zeiger $\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \ldots \\ a, & b, & c, \ldots \end{matrix}\right)$ entwickelt werden, deſsen Elemente ganz einfache ſind; hingegen in den eben entwickelten Formeln für $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. w. beziehn ſich die Klaſſenzeichen auf die ſehr zuſammengeſetzten Elemente $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. f. Hieraus wird man einſehn, daſs die Hindenburgiſche Methode der andern vorzuziehn iſt.

§. 104.

§. 104.

2. Aufgabe.

Es ſey

$$\alpha z^{\mathrm{R}} + \beta z^{\mathrm{R}+\mathrm{D}} + \gamma z^{\mathrm{R}+2\mathrm{D}} + \ldots = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots,$$

es wird für x^{σ} eine Reihe verlangt, die nach den Potenzen der z fortſchreitet.

Auflöſung.

Man nehme noch eine dritte verändliche Gröſse y an und ſetze $y = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$ und drücke x^{σ}, nach der Auflöſung der erſten Aufgabe, zuerſt durch y aus, ſo daſs ſich alſo die Localzeichen der hierdurch gefundenen Reihe, auf die Scale p(a, b, c, d, ...) bezieht, wenn man wieder, wie vorhin, $ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$ mit p bezeichnet. Iſt dies geſchehn und man hat $x^{\sigma} = Ay^{\frac{\sigma}{\varrho}} + By^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + Cy^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \ldots$, gefunden, ſo ſetze man in dieſe Gleichung, weil auch $y = q$ iſt, wenn unter q die Reihe $\alpha z^{\mathrm{R}} + \beta z^{\mathrm{R}+\mathrm{D}} + \ldots$ verſtanden wird, $q^{\frac{\sigma}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $q^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, $q^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ u. ſ. f. ſo hat man die für x^{σ} geſuchte Reihe.

Beweis.

Die Richtigkeit dieſes Verfahrens fällt deutlich in die Augen, weil man durch die erſte Vorſchrift für x^{σ} eine durch y ausgedrückte richtige Reihe findet und die-

ſe

ſe wieder durch die zweite Vorſchrift in eine nach den Dignitäten der z fortlaufende Reihe verwandelt.

Anmerkung.

Hat die gegebene Gleichung die Form

$$\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \gamma z^{m+2} + \ldots = a x^m + b x^{m+1} + c x^{m+2} + \ldots$$

und es wird für x eine Reihe durch z verlangt, ſo laſst ſich dieſe Reihe nach dem Moivriſchen Verfahren angeben, ohne eine dritte veränderliche Gröſse zu Hülfe zu nehmen. Nimmt man nämlich

$z = \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots$ an, ſo wird, wenn m als eine ganze poſitive Zahl angeſehn wird (§. 83)

$$x^m = {}_m^{m}\mathfrak{M} z^m + {}_m^{m+1}\mathfrak{M} z^{m+1} + {}_m^{m+2}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots$$

$$x^{m+1} = \overset{+1}{{}_m^{m+1}\mathfrak{M}} z^{m+1} + \overset{+1}{{}_m^{m+2}\mathfrak{M}} z^{m+2} + \overset{+1}{{}_m^{m+3}\mathfrak{M}} z^{m+3} + \ldots$$

$$x^{m+2} = \overset{+2}{{}_m^{m+2}\mathfrak{M}} z^{m+2} + \overset{+2}{{}_m^{m+3}\mathfrak{M}} z^{m+3} + \overset{+2}{{}_m^{m+4}\mathfrak{M}} z^{m+4} + \ldots$$

$$x^{m+3} = \overset{+3}{{}_m^{m+3}\mathfrak{M}} z^{m+3} + \overset{+3}{{}_m^{m+4}\mathfrak{M}} z^{m+4} + \overset{+3}{{}_m^{m+5}\mathfrak{M}} z^{m+5} + \ldots$$

" " " "

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4\\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}\end{matrix}\right)$$

Subſtituirt man dieſe Werthe der x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3}, u. ſ. f. in die gegebene Gleichung, ſo bekömmt man:

$$\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \gamma z^{m+2} + \delta z^{m+3} + \ldots$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
&{}_{am}^{m}\mathfrak{M} z^m + {}_{am}^{m+1}\mathfrak{M} z^{m+1} + {}_{am}^{m+2}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots\\
&\qquad\qquad {}_{bm}^{m+1}\mathfrak{M} z^{m+1} + {}_{bm}^{m+2}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad {}_{cm}^{m+2}\mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots
\end{aligned}$$

u. ſ. w.

Wird

Wird hier ein jeder Coefficient der Reihe $\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \ldots$, jedesmal der Summe derjenigen Coefficienten der andern Reihe gleich gesetzt, welche sich auf die nämliche Dignität der z beziehn wozu er gehört, so entstehen die Gleichungen:

$$\alpha = {}_{am}^{\;m}\mathfrak{M}$$

$$\beta = {}_{am}^{m+1}\mathfrak{M} + {}_{b\,m}^{1\;m+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$\gamma = {}_{am}^{m+2}\mathfrak{M} + {}_{bm}^{1\;m+2}\overset{+1}{\mathfrak{M}} + {}_{cm}^{2\;m+2}\overset{+2}{\mathfrak{M}}$$

" " " "

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \ldots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, & \ldots\end{matrix}\right)$$

Werden nun vermittelst dieser Gleichungen die Werthe der $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. f. aufgesucht, so giebt die erste Gleichung den Werth des $\dot{\mathfrak{A}}$ durch α und a; die zweite Gleichung giebt den Werth des $\dot{\mathfrak{B}}$ durch β, a, b und $\dot{\mathfrak{A}}$ die dritte giebt den Werth des $\dot{\mathfrak{C}}$ durch γ, a, b, c, $\dot{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\mathfrak{B}}$, u. s. w. so dass man also durch diese Gleichungen die Werthe aller Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. f. durch a, b, c, d, ... und α, β, γ, δ, ... bestimmen kann.

β. Independente Formeln. a)

§. 105.

3. *Aufgabe.*

Es soll unter der Anname, dass $z = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$, eine unabhängige Localformel für das n+ite Glied derjenigen Reihe angegeben werden, welche x^{σ} durch fortlaufende Potenzen der z darstellt.

Auf-

a) Hierunter werden die gedacht, welche ein jedes Glied indegedent von allen übrigen geben,

Auflösung. a)

Bezeichnet man die Reihe $ax^{\rho} + bx^{\rho+\delta} + cx^{\rho+2\delta} + \ldots$ mit p, so ist

$$x^{\sigma}\,7\,(n+1) = \frac{\sigma}{\sigma+n\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+n\delta}{\rho}}\; k\,(n+1)\,z^{\frac{\sigma+n\delta}{\rho}}$$

1. *Zusatz.*

$$\text{Es ist } x^{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma}\cdot p^{-\frac{\sigma}{\rho}}\; k1\,.\,z^{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+\delta}{\rho}}\; k2\,.\,z^{\frac{\sigma+\delta}{\rho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+2\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+2\delta}{\rho}}\; k3\,.\,z^{\frac{\sigma+2\delta}{\rho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+3\delta}\cdot p^{-\frac{\sigma+3\delta}{\rho}}\; k4\,.\,z^{\frac{\sigma+3\delta}{\rho}}$$

" " " " " "

p (a, b, c, d, ...)

4. *Zu-*

a) Den Beweis für die Richtigkeit dieser Auflösung, welcher seiner Weitläuftigkeit wegen hier übergangen wird, enthält die Dissertatio academica auctore M. Henrico Augusto Rothe, welche den Titel führt; Formulae de Serierum reversione demonstratio universalis, signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Lipsiae 1793. 4.

Wird $\frac{\sigma+n\delta}{\varrho} = {}^{n}m$ und daher $\frac{\sigma}{\varrho} = {}^{c}m$ gesetzt, so läst sich die Formel der Auflösung auch so ausdrücken:

$$x^{\sigma} 7 (n+1) = \frac{{}^{c}m}{{}^{n}m} \cdot p^{-{}^{n}m} k(n+1) \cdot z^{{}^{n}m}$$

Setzt man in diese Gleichung statt $p^{-{}^{n}m} k(n+1)$ den gleichgültigen Ausdruck, welchen der 1te Zusatz des §. 85 giebt, so erhält man $x^{\sigma} 7 (n+1) =$

$$\frac{{}^{c}m}{{}^{n}m} \Big\{ {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{A}_a {}^{-{}^{n}m-1}{}_a{}^{n}A + {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{B}_a {}^{-{}^{n}m-2}{}_b{}^{n}B + {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{C}_a {}^{-{}^{n}m-3}{}_c{}^{n}C + {}^{-{}^{n}m}\mathfrak{D}_a {}^{-{}^{n}m-4}{}_d{}^{n}D + \ldots \Big\} z^{{}^{n}m}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots}{b,\ c,\ d,\ e, \ldots}$$

Anmerkung.

Dividirt man die einzelnen Glieder der letzten Formel durch $a^{-{}^{n}m}$ und multiplicirt dann das Ganze wieder mit $a^{-{}^{n}m}$, so wird $x^{\sigma} 7 (n+1) =$

$$\frac{{}^{c}m}{{}^{n}m} \Big\{ \frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{A}_a {}^{n}A}{a} + \frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{B}_b {}^{n}B}{a^2} + \frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{C}_c {}^{n}C}{a^3} + \ldots \Big\} \left(\frac{z}{a}\right)^{{}^{n}m}$$

Substituirt man hierinn statt ${}^{-{}^{n}m}\mathfrak{B}$, ${}^{-{}^{n}m}\mathfrak{C}$, ${}^{-{}^{n}m}\mathfrak{D}$ u. s. w. die Werthe $\frac{{}^{{}^{n}m+1}_{\ \ {}^{n}m}\mathfrak{A}}{2}$, $-\frac{{}^{{}^{n}m+2}_{\ \ {}^{n}m}\mathfrak{B}}{3}$, $\frac{{}^{{}^{n}m+3}_{\ \ {}^{n}m}\mathfrak{C}}{4}$, u. s. f. so bekömmt man, da $\frac{{}^{-{}^{n}m}\mathfrak{A}}{{}^{n}m} = -1$ ist,

$$x^{\sigma}7(n+1) = -{}^{\sigma}m\left\{\frac{{}^{n}_{a}A}{a} - \frac{{}^{nm+1}\mathfrak{A}_{b}\,{}^{n}B}{2a^{2}} + \frac{{}^{nm+2}\mathfrak{B}_{c}\,{}^{n}C}{3a^{3}} - \frac{{}^{nm+3}\mathfrak{C}_{d}\,{}^{n}D}{4a^{4}} + \ldots\right\}\left(\frac{z}{a}\right)^{nm}$$

Unter dieser Form ist die Formel für $x^{\sigma}7(n+1)$ von Eschenbach *a*), einem Schüler Hindenburgs, gefunden. Hindenburg leitete hierauf aus dieser, die letzte des Zusatzes und aus dieser wieder die in der Auflösung aufgestellte Formel her.

§. 106.

4. *Aufgabe. b*).

Es wird unter der Bedingung, dass

$$\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+D} + \ldots = ax^{\rho} + bx^{\rho+\delta} + cx^{\rho+2\delta} + \ldots$$

für x^{σ} eine allgemeine independente Formel einer Reihe gesucht, welche nach den Dignitäten der z fortgeht.

Auf-

a) Eschenbach, de Serierum Rev. Diss. Lipsiae 1789. pag. 24. Er wusste aber die Richtigkeit seiner Formel nicht zu beweisen; dies gab zu der vorhin genannten Rothischen äusserst scharfsinnigen Dissertation Veranlassung. In dieser kömmt Rothe direct auf die Localformel und aus dieser folgert er die Eschenbachsche. Dass sich die Localformel auch aus dem allgemeinen Lagrangischen Satze $x - z\varphi x = \psi y + z\varphi y\frac{d\psi y}{dy} + \ldots$ wo $y = x - z\varphi x$, herleiten lasse, zeigt Pfaff in den beiden Abhandlungen in welchen er einen strengen Beweis für den genannten Satz giebt. (Arch. der Mat. H. I, S. 81, und D[illegible]uis. analyt. S. 227.).

b) Dies wichtige Problem machte Hindenburg in folgender Schrift bekannt: Problema solutum maxime universale ad Serierum Reversionem, Formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam Paralipomenon. Lipsiae 1793.

Auflösung.

1) Man bezeichne die erste Seite der Gleichung mit q und die andere mit p und setze $y = ax^{\rho} + bx^{\rho+\delta} + cx^{\rho+2\delta} + ..$

2) Man bestimme x^{σ} durch eine Reihe welche nach y fortschreitet und zwar vermittelst des ersten Zusatzes zum §. 105. Hierdurch erhält man, wenn wieder unter ${}^{n}m$ der Ausdruck $\frac{\sigma+n\delta}{\rho}$, unter $\underset{n}{m}$ aber der Ausdruck $\frac{\sigma}{\sigma+n\delta}$ verstanden wird,

$$x^{\sigma} = \underset{0}{m}.q^{-{}^{0}m}k1.y^{{}^{0}m} + \underset{1}{m}.q^{-{}^{1}m}k2.y^{{}^{1}m} + \underset{2}{m}.q^{-{}^{2}m}k3.y^{{}^{2}m} + ..$$

$$q(a, b, c, d, \ldots)$$

3) Man setze auch $y = \alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+2D} + ..,$ so wird nach §. 87.

$$y^{{}^{0}m} = p^{{}^{0}m}k1.z^{{}^{0}m.R} + p^{{}^{0}m}k2.z^{{}^{0}mR+D} + p^{{}^{0}m}k3.z^{{}^{0}mR+2D} + .$$

$$y^{{}^{1}m} = p^{{}^{1}m}k1.z^{{}^{1}mR} + p^{{}^{1}m}k2,z^{{}^{1}mR+D} + p^{{}^{1}m}k3.z^{{}^{1}mR+2D} + ..$$

$$y^{{}^{2}m} = p^{{}^{2}m}k1.z^{{}^{2}mR} + p^{{}^{2}m}k2.z^{{}^{2}mR+D} + p^{{}^{2}m}k3.z^{{}^{2}mR+2D} + ..$$

" " " " " "

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$$

4) Man substituire die in 3 entwickelten Werthe statt $y^{{}^{0}m}$, $y^{{}^{1}m}$, $y^{{}^{2}m}$, $y^{{}^{3}m}$ in die in 2) angegebene Reihe, so hat man die verlangte Formel.

Beweis.

Dass durch die Auflösung eine richtige Reihe entsteht welche x^{σ} durch z ausdrückt, erhellet hier eben so, wie bei der Aufgabe des §. 104. Dass aber diese Reihe auch independent sey, folgt daraus weil sie vermittelst independenter Formeln erhalten wird.

Combinatoriſche Schriften.

Infinitinomii Dignitatum, Exponentis indeterminati, Hiſtoria, Leges ac Formulae; auctore Car. Frid. Hindenburg. Editio aucta et emendata. Goettingae 1779. 4.

Ejusdem Novi Syſtematis Permutationum, Combinationum ac Variationum primae lineae. Lipſiae 1781. 4.

Hindenburgs 6 Bogen lange Vorrede zu Rüdigers Specim. analyt. de lineis curvis ſecundi ordinis; in dilucidationem Analyſeos Finitorum Käſtnerianae. Lipſiae 1784. 4.

Mehrere Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie und des Magazins für reine und angewandte Mathematik, von den Jahren 1781 — 1788. 8.

Hier. Chriſtoph. Vilelm. Eſchenbachii Epiſtola ad fratrem Chriſtian. Gotthold Eſchenbach. (Ineſt in locum Kaeſtnerianum de multipli Angulorum Tangentibus commentatio.). Lipſiae 1789. 4.

De Serierum Reverſione formulis analytico-combinatoriis exhibita ſpecimen. Auctore Hier. Chriſtoph. Vilelm. Eſchenbach. Lipſiae 1789. 4.

Combinatoriſche Analytik und Theorie der Dimenſionszeichen in Parallele geſtellt von Heinrich Auguſt Töpfer. Leipzig 1793. 8.

Formulae de Serierum Reverſione demonſtratio univerſalis, ſignis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Auctore Henrico Auguſto Rothe. Lipſiae 1793. 8.

Pro.

Problema ſolutum maxime univerſale ad Serierum Reverſionem formulis localibus et combinatorio-analyticis abſolvendam Paralipomenon. Auctore Caroli Friderici Hindenburg. Lipſiae 1793. 4.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. Von den Jahren 1791 — 1798.

De uſu Logarithmorum Infinitinomii in theoria Aequationum, diſſertatio combinatorio-analytica. Auctore Mauricio de Praſſe. Lipſiae 1796. 4.

Der Polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis nebſt einigen verwandten und andern Sätzen. Neu bearbeitet und dargeſtellt von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Leipzig 1796. 8.

Diſquiſitiones Analyticae maxime ad Calculum integralem et Doctrinam Serierum pertinentes. Volumen I. Auctore Joanne Friderico Pfaff. Helmſtadii 1797. 4. Caput II. Tractatus de Reverſione Serierum, ſive de Reſolutione Aequationum per Series.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Durch

Durch P; Z; v. o; v. u wird angedeutet: Pagina, Zeile, von oben, von unten.

Ort	Fehler	Verbeſſerung
P. 4, Z. 15, v. u.	combinatoriſche Behandlung.	arithmetiſch combinatoriſche Behandlung
P. 13, Z. 8, v. u.	Linken nach der Rechten	Rechten nach der Linken
P. 63, Z. 13, v. o.	${}^{n-1\prime}A$	${}_{a}^{n-1\prime}A$
P. 67, Z. 7, v. u.	$\mathfrak{N}$	${}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$
— — Z. 3, v. u.	${}'\mathfrak{N}$	${}'\overset{1}{\mathfrak{N}}$
P. 68, Z. 2, v. u.	${}'\mathfrak{N}$	${}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$
— — Z. 10. v. o.	$d\,{}'\mathfrak{N} + e\,{}'\mathfrak{N}$	$d\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}} + e\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$
P. 97, Z. 9. v. u.	ſubſtituirt.	ſubſtituirt. *a)*
P. 97,	Unten fehlt die Note: *a)* Die Binion be ausgenommen.	
P. 126, Z. 7, v. u.	Ntion	Mtion
P. 127, Z. 8, v. u.	M—2tion	M—(m—2)tion
P. 149, Z. 6, v. o.	r^6	r^4
P. 198, Z. 4, v. o.	in welchen	in welchem
— — Z. 6, v. o.	in welchen	in welchem
— — Z. 9, v. o.	Variationenen	Variationen
P. 202, Z. 4, v. o.	z^{a+b+c}	${}_{z}a+b+c$
P. 210, Z. 13, v. o.	zm^{δ}	${}_{z}m\delta$
P. 216, Z, 7, v. u.	dz^7	dz^8
— — Z. 6, v. u.	$Cz^6 \quad Dz^8$	$Cz^7 \quad Dz^9$
P. 256, Z. 11, v. o.	ϱ	π
— — Z. 14, v. o.	π	ϱ
P. 270, Z. 1, v. u.	$\mathfrak{A}$	$\overset{-2}{\mathfrak{A}}$
P. 277, Z. 3, v. o.	$\frac{{}_{a}^{1}A}{\alpha}$	$\frac{{}_{a}^{1}A}{\alpha^2}$
P. 316, Z. 10, v. o.	z ==	x ==

Jena,
gedruckt bei Prager und Comp.

I. TABELLE.

${}_i^{1}J,\ {}_i^{2}J,\ {}_i^{3}J,\ {}_i^{4}J,\ {}_i^{5}J,\ {}_i^{6}J,\ {}_i^{7}J,\ {}_i^{8}J,\ {}_i^{9}J,\ {}_i^{10}J$

$${}_i^{1}J \begin{cases} {}_a^{1}A = a \end{cases}$$

$${}_i^{2}J \begin{cases} {}_a^{2}A = b \\ {}_b^{2}B = a^2 \end{cases}$$

$${}_i^{3}J \begin{cases} {}_a^{3}A = c \\ {}_b^{3}B = 2ab \\ {}_c^{3}C = a^3 \end{cases}$$

$${}_i^{4}J \begin{cases} {}_a^{4}A = d \\ {}_b^{4}B = \begin{cases} 2ac \\ b^2 \end{cases} \\ {}_c^{4}C = 3a^2b \\ {}_d^{4}D = a^4 \end{cases}$$

$${}_i^{5}J \begin{cases} {}_a^{5}A = e \\ {}_b^{5}B = \begin{cases} 2ad \\ 2bc \end{cases} \\ {}_c^{5}C = \begin{cases} 3a^2c \\ 3ab^2 \end{cases} \\ {}_d^{5}D = 4a^3b \\ {}_e^{5}E = a^5 \end{cases}$$

$${}_i^{6}J \begin{cases} {}_a^{6}A = f \\ {}_b^{6}B = \begin{cases} 2ae \\ 2bd \\ c^2 \end{cases} \\ {}_c^{6}C = \begin{cases} 3a^2d \\ 6abc \\ b^3 \end{cases} \\ {}_d^{6}D = \begin{cases} 4a^3c \\ 6a^2b^2 \end{cases} \\ {}_e^{6}E = 5a^4b \\ {}_f^{6}F = a^6 \end{cases}$$

$${}^{7}J \begin{cases} {}_a^{7}A = g \\ {}_b^{7}B = \begin{cases} 2af \\ 2be \\ 2cd \end{cases} \\ {}_c^{7}B = \begin{cases} 3a^2e \\ 6abd \\ 3ac^2 \\ 3b^2c \end{cases} \\ {}_d^{7}D = \begin{cases} 4a^3d \\ 12a^2bc \\ 4ab^3 \end{cases} \\ {}_e^{7}E = \begin{cases} 5a^4c \\ 10a^3b^2 \end{cases} \\ {}_f^{7}F = 6a^5b \\ {}_g^{7}G = a^7 \end{cases}$$

$${}_i^{8}J \begin{cases} {}_a^{8}A = h \\ {}_b^{8}B = \begin{cases} 2ag \\ 2bf \\ 2ce \\ d^2 \end{cases} \\ {}_c^{8}C = \begin{cases} 3a^2f \\ 6abe \\ 6acd \\ 3b^2d \\ 3bc^2 \end{cases} \\ {}_d^{8}D = \begin{cases} 4a^3e \\ 12a^2bd \\ 6a^2c^2 \\ 12ab^2c \\ b^4 \end{cases} \\ {}_e^{8}E = \begin{cases} 5a^4d \\ 20a^3bc \\ 10a^2b^3 \end{cases} \\ {}_f^{8}F = \begin{cases} 6a^5c \\ 15a^4b^2 \end{cases} \\ {}_g^{8}G = 7a^6b \\ {}_h^{8}H = a^8 \end{cases}$$

$${}_i^{9}J \begin{cases} {}_a^{9}A = \\ {}_b^{9}B = \begin{cases} 2ah \\ 2bg \\ 2cf \\ 2de \end{cases} \\ {}_c^{9}C = \begin{cases} 3a^2g \\ 6abf \\ 6ace \\ 3ad^2 \\ 3b^2e \\ 6bcd \\ c^3 \end{cases} \\ {}_d^{9}D = \begin{cases} 4a^3f \\ 12a^2be \\ 12a^2cd \\ 12ab^2d \\ 12abc^2 \\ 4b^3c \end{cases} \\ {}_e^{9}E = \begin{cases} 5a^4e \\ 20a^3bd \\ 10a^3c^2 \\ 30a^2b^2c \\ 5ab^4 \end{cases} \\ {}_f^{9}F = \begin{cases} 6a^5d \\ 30a^4bc \\ 20a^3b^3 \end{cases} \\ {}_g^{9}G = \begin{cases} 7a^6c \\ 21a^5b^2 \end{cases} \\ {}_h^{9}H = 8a^7b^2 \\ {}_i^{9}I = a^9 \end{cases}$$

$${}_i^{10}J \begin{cases} {}_a^{10}A = k \\ {}_b^{10}B = \begin{cases} 2ai \\ 2bh \\ 2cg \\ 2df \\ e^2 \end{cases} \\ {}_c^{10}C = \begin{cases} 3a^2h \\ 6abg \\ 6acf \\ 6ade \\ 3b^2f \\ 6bce \\ 3bd^2 \\ 3c^2d \end{cases} \\ {}_d^{10}D = \begin{cases} 4a^3g \\ 12a^2bf \\ 12a^2ce \\ 6a^2d^2 \\ 12ab^2e \\ 24abcd \\ 4ac^3 \\ 4b^3d \\ 6b^2c^2 \end{cases} \\ {}_e^{10}E = \begin{cases} 5a^4f \\ 20a^3be \\ 20a^3cd \\ 30a^2b^2d \\ 30a^2bc^2 \\ 20ab^3c \\ b^5 \end{cases} \\ {}_f^{10}F = \begin{cases} 6a^5e \\ 30a^4bd \\ 15a^4c^2 \\ 60a^3b^2c \\ 15a^2b^4 \end{cases} \\ {}_g^{10}G = \begin{cases} 7a^6d \\ 42a^5bc \\ 35a^4b^3 \end{cases} \\ {}_h^{10}H = \begin{cases} 8a^7c \\ 28a^6b^2 \end{cases} \\ {}_i^{10}I = 9a^8b \\ {}_k^{10}K = a^{10} \end{cases}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots}$$

II. TABELLE.

Anzahl aller Combinationen zur Summe n für die Elemente

1, 2, 3, 4, 5, ... m

Zahl m	Werthe der Zahl n																														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52	56	61	65	70	75	80	85	91
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136	150	169	185	206	225	249	270	297
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255	291	333	377	427	480	540	603	674
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391	454	532	612	709	811	931	1057	1206
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522	618	733	860	1009	1175	1367	1579	1824
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638	764	919	1090	1297	1527	1801	2104	2462
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598	732	887	1076	1291	1549	1845	2194	2592	3060
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807	984	1204	1455	1761	2112	2534	3015	3590
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863	1060	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057	4920
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446	4192	5096
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871	3523	4293	5231
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	791	1000	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507
21	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	792	1002	1255	1575	1950	2436	3010	3718	4565	5604

1. *Aufgabe.* Die Anzahl aller Combinationen zur Summe n anzugeben, die für die Elemente 1, 2, 3, .. m möglich ſind.

Auflöſung. Man ſuche in der Tabelle die Zahlen n und m auf, ziehe von n aus eine vertikale und von m aus eine horizontale Linie; die Zahl iſt alsdenn die geſuchte, in welcher ſich gedachte Linien ſchneiden.

2. *Aufgabe.* Die Anzahl der Combinationen ${}^{n}\mathfrak{M}$ für die Elemente 1, 2, 3, ... n zu beſtimmen.

Auflöſung. Man ſuche für die Elemente 1, 2, 3, .. m die Anzahl aller Combinationen zur Summe n—m. (1 Aufg. Aufl.).

3. *Aufgabe.* Die Anzahl der Combinationen der ${}^{n}\mathfrak{M}$ für die Elemente 1, 2, 3, .. n zu berechnen.

Auflöſung. Man ſuche für die Elemente 1, 2, 3, ... m, die Anzahl aller Combinationen zur Summe $n - \frac{m(m+1)}{1 \quad 2}$. (1 Aufg. Aufl.).

Anmerkung. Bezeichnet man willkührlich die Anzahl aller für die Elemente 1, 2, 3... m möglichen Combinationen zur Summe n, mit $n^{(m)}$, ſo daſs alſo $n^{(m)}$ keine Dignität bedeutet, ſo iſt $n^{(m)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3^{(3)} + \cdots + (n-m)^{(m)}$.

2 Zub

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Stahl, Konrad Dietrich Martin,

Grundriss der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis

Jena [u.a.] 1800

Math.p. 540
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082873-2
VD18 11889934-002